Analysis I/II/III
Wintersemester 1993/94
Sommersemester 1994
Wintersemester 1994/1995

nach der Vorlesung von
Prof. Dr. N. Steinmetz
Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX

19. Dezember 2002

In LaTeX gesetzt von
Thomas Leineweber

Zusammenfassung

Dieses Skript ist aus meinen persönlichen Mitschriften in den Vorlesungen ANALYSIS I bis ANALYSIS III vom Wintersemester 1993/94 bis zum Wintersemester 1994/95 bei Prof. Steinmetz entstanden. Ich habe mir große Mühe gegeben, alles richtig wiederzugeben. Dennoch gebe ich keine Garantie, daß dieses alle Sachverhalte richtig wiedergibt. Ebenfalls übernehme ich keine Haftung für eventuelle Schäden, die durch die Benutzung dieses Skriptes enstanden sind oder entstehen werden (Klausur und Prüfungen!).

Für einen freundlichen Hinweis über Fehler oder Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Dabei sollte jedesmal die Version des entsprechenden Kapitels mit angegeben werden, die jeweils in einer Fußnote auf der ersten Seite aller Kapitel steht.

Dieses Skript darf nur umsonst bzw. zum Selbstkostenpreis weitergegeben werden. Es ist weder eine offizielle noch eine authorisierte Version von Prof. Steinmetz. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, daß sie von mir stammen.

Thomas Leineweber
Ortsmühle 9
44227 Dortmund
e-mail: `Thomas.Leineweber@udo.edu`

Datum dieser Gesamtversion: 19. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

0 Mathematische Notationen[1]

0.1 Mengen

0.1.1 Naive Mengendefinition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten und wohlunterschiedenen Objekten. Es gelten die folgenden Aussagen:
$x \in M$: x ist Element von M, x gehört zur Menge M („x aus M").
$x \notin M$: x ist nicht Element von M, x gehört nicht zur Menge M.

0.1.2 Mengenschreibweisen

Es gibt die aufzählende und die beschreibende Mengenschreibweise:

aufzählend: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
Bsp.: $M = \{\text{Merkur, Venus, Erde, Mars}\}$

beschreibend: $M = \{x\colon x \text{ hat die Eigenschaft } \varepsilon\}$
Bsp.: $M = \{x\colon x \text{ ist innerer Planet}\}$

0.1.3 Mengenrelationen

$A \subseteq B$ ist eine Teilmengenrelation und bedeutet: A ist Teilmenge von B, A ist Untermenge von B oder B ist Obermenge von A. D. h. jedes $x \in A$ gehört auch zu B.
$B \supseteq A$ bedeutet genau das gleiche wie $A \subseteq B$.
$A = B$ bedeutet: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
$\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält. $\emptyset$ heißt leere Menge. Für jede Menge A ist $\emptyset \subseteq A$.
$P(M) := \{A\colon A \subseteq M\}$ ist die Potenzmenge von M. Für $M = \{a, b, c\}$ ist

$$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

die Potenzmenge. Für alle Mengen M gilt insbesondere $M \subseteq P(M)$.

0.1.4 Mengenoperationen

Vereinigung:

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Durchschnitt:

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ und } x \in B\}$$

[1] Version 4.8 vom 5. August 2002

Für Durchschnitt und Vereinigung gelten folgende Aussagen:

$$A \cap B \subseteq A, B \text{ und } A, B \subseteq A \cup B.$$

Differenz:

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A,\, x \notin B\}$$

kartesisches Produkt:

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A,\, b \in B\}$$

Für jedes Paar (a, b) gilt:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow a = a_1,\, b = b_1.$$

Sei nun $\Lambda \neq \emptyset$ und zu jedem Element $\lambda \in \Lambda$ sei M_λ Menge. Dann setzt man

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{x \colon x \in M_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda\},$$

die Vereinigung der Mengen M_λ und

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{x \colon x \in M_\lambda \text{ für jedes } \lambda \in \Lambda\},$$

der Durchschnitt der Mengen M_λ

Bereits bekannte Mengen von Zahlen

Zeichen	Name	Beschreibung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
$\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}\right\}$

0.2 Abbildungen

Seien A, B Mengen.

0.2.1 Naive Abbildungsdefinition

Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ ein eindeutig bestimmtes $b \in B$ zuordnet.
Schreibweise:

$$\begin{aligned} f \colon\ A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

0.2.2 Graph von f

Sei $f \colon A \to B$ eine Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{graph} f = \{(a, f(a)) \colon a \in A\} \subseteq A \times B$$

der *Graph von f*.

0.2.3 Komposition

Sind $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt

$$g \circ f : A \to C, (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

die *Komposition* "g nach f"

0.2.4 Definitions- und Wertebereich

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt A der *Definitionsbereich* und B der *Werte-/Zielbereich* von f.

0.2.5 Bild und Urbild

Für $A_1 \subseteq A$ heißt

$$f(A_1) := \{f(a)\colon a \in A_1\} \subseteq B$$

Bild von A_1 unter f. Insbesondere ist $f(A)$ das Bild von f.
Für $B_1 \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(B_1) := \{a\colon f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Urbild von B_1 unter f.

0.2.6 injektiv, surjektiv, bijektiv

Die Funktion $f : A \to B$ heißt

surjektiv:	$f(A) = B$
injektiv:	für beliebige $x, y \in A$, $x \neq y$ gilt: $f(x) \neq f(y)$
bijektiv:	f ist injektiv und surjektiv

0.2.7 Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ injektiv, so gibt es eine Funktion/Abbildung $f^{-1} : f(A) \to A$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$. f^{-1} heißt Umkehrfunktion von f auf $f(A)$. f^{-1} existiert genau dann auf B, wenn f bijektiv ist.

0.3 Elementare Logik

A und B seien Aussagen, wahr oder falsch.
$A \Rightarrow B$ bedeutet: „aus A folgt B"
aus der Gültigkeit der Aussage A
folgt die Gültigkeit von B
A ist *hinreichend* für B
B ist *notwendig* für A
$B \Leftarrow A$ hat genau die gleiche Bedeutung
$B \Leftrightarrow B$ bedeutet: „genau dann", A und B sind äquivalent
A und B sind zugleich richtig oder falsch
gleichbedeutend: $A \Rightarrow B$, $A \Leftarrow B$

1 Die reellen Zahlen[1]

1.1 Der Körper $\mathbb{R}$

1.1.1 Definition: $\mathbb{R}$

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ — die Menge der reellen Zahlen — und darauf sind eine Addition $x + y$ und eine Multiplikation $x \cdot y$ erklärt, so daß folgende Regeln (Axiome) erfüllt sind:
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig

1. Assoziativitätsgesetz:
   $(x + y) + z = x + (y + z)$
   $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. Kommutativgesetz:
   $x + y = y + x$
   $x \cdot y = y \cdot x$
3. Existenz von 0 und 1
   Es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $0 + x = x$
   Es gibt $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot x = x$
4. Existenz der Inversen:
   Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$
   Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$
5. Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

1.1.2 Bemerkungen

(1) *Jede* Menge, in der eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind, so daß 1–5 gelten, heißt Körper.

(2) z.B. ist $\mathbf{Q}$ ein Körper.

(3) Statt $x + (-y)$ schreibt man $x - y$.
Statt x^{-1} schreibt man $\frac{1}{x}$.
Statt $x \cdot y^{-1}$ schreibt man $\frac{x}{y}$.

1.2 Anordnung von $\mathbb{R}$

1.2.1 Definition

$\mathbb{R}$ ist angeordnet, d. h. es gibt eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}$ mit:

[1] Version 4.6 vom 18. Dezember 2002

1.) Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $x = 0$ oder $x \in P$ oder $-x \in P$.

2.) Für $x, y \in P$ ist $x + y \in P$.

3.) Für $x, y \in P$ ist $x \cdot y \in P$.

P ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Statt $x \in P$ schreibt man auch $x > 0$ oder $0 < x$. $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$, d. h. $y - x > 0 \Leftrightarrow: y > x$

1.2.2 Bemerkungen

(a) $x \in P$ heißt: x ist positiv, $-x \in P$ heißt: x ist negativ.

(b) Jeder Körper mit den Eigenschaften 1.), 2.), 3.) heißt *angeordneter* Körper, z. B. ist $\mathbf{Q}$ angeordnet mit $P = \left\{\frac{p}{q} \colon p, q \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $\mathbb{R}$ wird geometrisch gedeutet als Zahlengerade.

1.2.3 Regeln

Seien $x, y, z, t, u, v \in \mathbb{R}$:

(1) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

(2) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$

(3) $x < y$ und $u < v \Rightarrow x + u < y + v$

(4) $x < y$ und $z > 0$ $[z < 0] \Rightarrow xz < yz$ $[xz > yz]$

(5) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$

(6) $x < y$ und $0 < t < 1 \Rightarrow x < tx + (1 - t)y < y$. Insbesondere gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$

(7) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

1.3 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

1.3.1 Definition

Sei $M \in \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $\xi \in \mathbb{R}$

(a) ξ heißt *obere* bzw. *untere* Schranke von M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq \xi$ bzw. $x \geq \xi$.

(b) Gibt es eine obere bzw. untere Schranke, so heißt M *nach oben* bzw. *nach unten* beschränkt. Existieren beide Schranken, so heißt M *beschränkt.*

(c) Ist ξ obere bzw. untere Schranke mit $\xi \in M$, so heißt ξ das Maximum $\max M$ bzw. das Minimum $\min M$ von M.

1.3.2 Beispiel

Sei $M = \{x \colon 0 \leq x < 1\}$. Es ist $0 = \min M$ und 1 ist obere Schranke von M, aber $1 \notin M$. $\Rightarrow \max M$ existiert nicht.

1.3.3 Vollständigkeitsaxiom

Jede nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, das Supremum von M: $\sup M$. Genauso besitzt jede nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ eine größte untere Schranke, das Infimum von M: $\inf M$.
Für $\sup M$ bzw. $\inf M$ gilt:

(a) s ist obere bzw. untere Schranke

(b) $\xi < s$ bzw. $\xi > s \Rightarrow$ es existiert $x \in M$ mit $x > \xi$ bzw. $x < \xi$.

Gelten (a) und (b) dann ist $s = \sup M$. bzw. $s = \inf M$.

Beweis: s ist obere Schranke (a)
$\xi < s \underbrace{\Longrightarrow}_{(b)} \xi$ ist keine obere Schranke
$\Rightarrow s$ ist kleinste obere Schranke, also $s = \sup M$.

1.3.4 Beispiel

Sei

$$M = \left\{ \frac{x-y}{x+y} : 0 < y < 1,\, 0 < x < y^2 \right\}$$

Es ist

$$x + y > 0 \text{ und } x - y < y^2 - y = y(y-1) < 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x-y}{x+y} < 0 = \text{obere Schranke}$$

Behauptung: $\sup M = 0$

Beweis:

(a) $s = 0$ ist obere Schranke.

(b) Sei $-\frac{1}{3} < \xi < 0$, $y = 1 + \xi$ und $x = 1 + 2\xi \Longrightarrow 0 < \frac{2}{3} < y < 1$
$0 < \frac{1}{3} < x = 1 + 2\xi < 1 + 2\xi + \xi^2 = y^2$
Gilt nun

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{\xi}{2+3\xi} > \xi?$$

Es ist

$$2 + 3\xi > 2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2+3\xi} > 1 \Rightarrow \frac{\xi}{2+3\xi} > \xi$$

(b) ist erfüllt

$\Longrightarrow \sup M = 0 \notin M$

1.3.5 Existenz des Infimums

Jede nach unten beschränkte Menge $m \in \mathbb{R}$ besitzt immer eine größte untere Schranke, das Infimum von M: $\inf M$.

Beweis: Sei M nach unten beschränkt, $N := \{-x | x \in M\}$ $\sup N = -\inf M$

1.3.6 Archimedische Eigenschaft

$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis: (Indirekter Beweis)
Annahme: $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Damit existiert $\sup \mathbb{N} = s$.
$\Rightarrow s - 1$ ist keine obere Schranke. D. h. es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß $n > s - 1$ ist. $\Rightarrow n + 1 > s$. Widerspruch zu $\sup \mathbb{N} = s$.

1.3.7 Folgerung

$\inf \left\{ \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

Beweis: Das Infimum ist ≥ 0, weil $\frac{1}{n} > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) 0 ist untere Schranke

(b) Sei $\xi > 0$.
Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\xi}$. $\Rightarrow \frac{1}{n} < \xi \in \{\dots\} \Rightarrow \inf\{\dots\} = 0$

1.3.8 Satz

Gilt $M \subseteq N$ und ist N nach oben bzw. unten beschränkt, so gilt:

$$\sup M \leq \sup N \text{ bzw. } \inf M \geq \inf N.$$

Beweis: $s = \sup N$ ist insbesondere obere Schranke für N, also auch für M.
$\Rightarrow \sup M \leq s$. Für das Infimum genauso.

1.3.9 Satz

Seien $M, N \in \mathbb{R}$. Setze $-M := \{-x \colon x \in M\}$ und $M + N := \{x + y \colon x \in M, y \in N\}$. Dann gilt:

1. $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$, falls M und N nach oben beschränkt sind.
2. $\inf(M + N) = \inf M + \inf N$, falls M und N nach unten beschränkt sind.
3. $\sup(-M) = -\inf M$, falls M nach unten beschränkt ist.
4. $\inf(-M) = -\sup M$, falls M nach oben beschränkt ist.

Beweis: von (2):
Setze $m := \inf M$ und $n := \inf N$
$x \in M$, $y \in N \Rightarrow x \geq m$, $y \geq n$
$\Rightarrow x + y \geq m + n$, also ist $m + n$ untere Schranke für $M + N$.
Wähle $\xi > m + n$.
Dann existieren Zahlen $x \in M$ und $y \in N$ mit $x + y < \xi$ $(\xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 > m, \xi_2 > n)$.
Finde $x \in M$ und $y \in N$, so daß $x < \xi_1$ und $y < \xi_2$ ist. $\Rightarrow m + n = \inf(M + N)$.

1.4 Absolutbetrag

1.4.1 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

absoluter Betrag und

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Vorzeichen von x.
Es gelten:

$$x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \quad |x| = \max\{x, -x\}$$

$$x = \operatorname{sign}(x) \cdot |x|, \quad |x| = \operatorname{sign}(x) \cdot x$$

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$$

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

1.4.2 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x \cdot y \geq 0$ ist.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x + y \leq |x| + |y| \\ (2) & -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y| \end{array}\right\} |x + y| \leq |x| + |y|$$

Gleichheit genau dann, wenn in (1) oder (2) Gleichheit ist.

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

$|y| - |x|$ genauso.

1.4.3 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Setze

$$\begin{array}{rcll} (a,b) & = & \{x\colon a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a,b] & = & \{x\colon a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a,b) & = & \{x\colon a \le x < b\} & \text{halboffene Intervalle} \\ (a,b] & = & \{x\colon a < x \le b\} & \end{array}$$

1.4.4 Bemerkung

Für jedes dieser Intervalle I ist $\sup I = b$, $\inf I = a$.

Beweis: b ist obere Schranke für I.

$$\begin{array}{rl} & \xi < b,\ a < \xi < b:\ x = \dfrac{b+\xi}{2} \\ \Rightarrow & \xi < x < b \\ \Rightarrow & x \in I \\ \Rightarrow & \xi \text{ ist nicht obere Schranke} \end{array}$$

1.4.5 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $[x]$ die größte ganze Zahl$\le x$, d. h. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z}\colon n \le x\}$. Es gilt $[x] \le x < [x]+1$.

1.4.6 Satz

In jedem Intervall (a, b) gibt es ein $r \in \mathbf{Q}$ und $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$. („$\mathbf{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$“)

Beweis: Für $r \in \mathbf{Q}$ (später in 1.6.5 auf Seite 16 für $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$).

- Zunächst: $b - a > 1$
  Setze $r = \begin{cases} [b] & \text{für } b \notin \mathbb{Z} \\ [b]-1 & \text{sonst} \end{cases}$
- Allgemein: Wähle $q \in \mathbb{N}$ so, daß $q(b-a) > 1$ ist (archimed. Eigenschaft).
  Das Intervall (qa, qb) enthält $p \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow (a, b)$ enthält $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$,
  denn: $qa < p < qb \Rightarrow a < \frac{p}{q} < b \Rightarrow \frac{p}{q} \in (a, b)$

1.4.7 Erweiterungsmöglichkeiten

Erweiterung von $\mathbb{R}$: Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ($-\infty, \infty$ sind keine Zahlen).
Sinnvolle Relationen und Operationen:

$$-\infty < x < \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+\infty=\infty \\ x-\infty=-\infty \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ll} x\cdot\infty=\infty,\ x\cdot(-\infty)=-\infty & \text{für } x>0 \\ x\cdot\infty=-\infty,\ x\cdot(-\infty)=\infty & \text{für } x<0 \end{array}$$

$$\frac{x}{\infty}=\frac{x}{-\infty}=0 \text{ für } x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{x}{0}=\infty \text{ für } x>0,\ \frac{x}{0}=-\infty \text{ für } x<0$$

Erweiterung des Intervallbegriffs: $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\colon x\le b\}$.
Analog sind $(-\infty,b),[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$

Erweiterung des Supremum-/Infimum-Begriffs:
Ist $M\subseteq\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt,
so setzt man $\sup M=\infty$ bzw. $\inf M=-\infty$.

1.5 Vollständige Induktion

1.5.1 Induktionsprinzip

Gegeben seien $A(n)$, Aussagen für $n\in\mathbb{N}$.

(1) [Induktionsverankerung/-voraussetzung] $A(1)$ sei wahr.

(2) [Induktionsschritt] Aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt die Gültigkeit von $A(n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Dann sind alle $A(n)$ wahr.

Beweis: Sei $M=\{n\colon A(n) \text{ falsch}\}$, $1\neq M$.
$\inf M=m=\min M\Rightarrow A(m)$ ist falsch, $A(m-1)$ ist richtig. Widerspruch zu (2)!

1.5.2 Beispiel

Es ist $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

I.A.: $1=\frac{1\cdot 2}{2}=1$

I.S.: $1+2+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.5.3 Induktive Definition von Summe und Produkt

Seien $m,n\in\mathbb{Z}$, $a_\nu\in\mathbb{R}$

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu=\begin{cases} 0 & \text{falls } n<m \text{ (leere Summe)} \\ \left(\sum\limits_{\nu=m}^{n-1} a_\nu\right)+a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\prod_{\nu=m}^{n} a_\nu = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < m \text{ (leeres Produkt)} \\ \left(\prod\limits_{\nu=m}^{n-1} a_\nu\right) \cdot a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $m < n$ gilt:

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu =: a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\prod_{\nu=m}^{n} a_\nu =: a_m \cdot a_{m+1} \dots a_n$$

Potenz ($a \in \mathbb{R}$): $a^n := \prod\limits_{\nu=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n-\text{mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$
$a^0 = 1$ und $\left[a^n = \frac{1}{a^-n} \text{ für } -n \in \mathbb{N},\ a \neq 0\right]$
Fakultät: $n! := \prod\limits_{\nu=1}^{n} \nu = 1 \cdot 2 \dots n$ für $n \in \mathbb{N}$, $0! := 1$.

1.5.4 Binomialkoeffizienten

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\alpha - \nu + 1}{\nu} \qquad (\alpha \text{ über } k)$$

z. B.: $\binom{\alpha}{0} = 1$

$$k \in \mathbb{N}: \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \cdots$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{n}{k} = 0$, falls $n < k$.

$$(n \geq k): \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Es ist $\binom{n}{n} = 1$ und $\binom{0}{0} = 1$

1.5.5 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Beweis von $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} = \binom{\alpha+1}{k}$:

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)](\alpha-k+1+k)}{k!} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)(\alpha+1)}{k!} \\
&= \frac{(\alpha+1)(\alpha+1-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!} \\
&= \binom{\alpha+1}{k}
\end{aligned}$$

$n \geq k$: $\binom{n}{k}$ =Zahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen, ohne Bercksichtigung der Reihenfolge („n über k“ = „n choose k“) (engl.)

1.5.6 Binomischer Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \text{ für } n \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

Beweis: Induktion nach n.

- $n = 0$:
$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
1 &= 1
\end{aligned}$$
- $n = 1$:
$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$
$$a+b = b+a$$

- $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n+1-1}a^{n+1}b^{n-n-1+1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n-k+1} \\
&\quad + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0}b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.5.7 Nachtrag

$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, falls $n \geq k$, $n, k \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Induktion nach n:

$$n = 0: \binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n+1: \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

$$1 \leq k \leq n: \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Nach I.V. werden 2 ganze Zahlen addiert, die eine ganze Zahl ergeben.

1.5.8 Bernoullische Ungleichung

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Gleichheit gilt genau in folgenden Fällen: $n = 1$, $x \geq -1$, bzw. $n > 1$, $x = 0$

Beweis:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \underbrace{\geq}_{\text{falls } x \geq 0} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx$$

Induktionsbeweis für $x \geq -1$:

$$\begin{array}{lrcl} n = 1: & (1+x)^1 & = & 1 + 1x \\ n \mapsto n+1: & (1+x)^{n+1} & = & \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \\ & & \geq & (1+x)(1+nx) \\ & & = & 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ & & \geq & 1 + (n+1)x \end{array}$$

1.6 Wurzeln

1.6.1 Beispiel

Für $r \in \mathbf{Q}$ ist $r^2 \neq 2$.

Beweis: Annahme: $r = \frac{m}{n}$ erfüllt $r^2 = 2$ (m, n ohne gemeinsamen Teiler, $m, n \in \mathbb{N}$). Es ist dann $m^2 = 2n^2$, also ist $m = 2p$, m ist gerade.
$\Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2 \Rightarrow n = 2q$ ist gerade. Widerspruch!

1.6.2 Satz

Zu jedem $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \geq 0$ mit $\xi^n = a$.
Schreibweise: $\xi = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beweis der Eindeutigkeit: Sei $0 \leq x < y \Rightarrow x^2 < y^2$, mit Induktion $x^n < y^n$, d. h. $x^n = a$ und $y^n = a$ unmöglich.

Beweis der Existenz: Für $a = 0$, $\xi = 0 \Longrightarrow$ o.k.
Ab jetzt sei $a > 0$. Sei $M = \{x \colon x \geq 0,\ x^n \leq a\}$.
$M \neq \emptyset$, da $0 \in M$. Außerdem ist M nach oben beschränkt durch $s = a + 1$, denn für $x > s = a + 1$ gilt: $x^n > (a+1)^n > a$, d. h. $x \notin M$.
Behauptung: $\xi = \sup M$. Zeige $\xi^n = a$
Beweis: Sei $1 > \varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $x \in M$, $x > \xi - \varepsilon$
$|a - \xi^n| < \varepsilon(s+1)^n \Rightarrow a = \xi^n$.

1. $1 > \varepsilon > 0$ beliebig.

Dann existiert ein $x \in M$, $x > \xi - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\xi^n < (x+\varepsilon)^n &= \underbrace{x^n}_{\leq a} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j x^{n-j} \\
&\leq a + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-1} \\
&< a + \varepsilon (s+1)^n \\
\Rightarrow \xi^n - a &\leq \varepsilon (s+1)^n
\end{aligned}$$

2. $1 > \varepsilon > 0$ beliebig: $x = \xi + \varepsilon \notin M$, $\xi + \varepsilon > 0$
   $\Rightarrow a < (\xi + \varepsilon)^n \leq \cdots \leq \xi^n + \varepsilon(s+1)$
   $\Rightarrow a - \xi^n \leq \varepsilon(s-1)^n$

Aus 1.) und 2.) folgt: $|\xi^n - a| \leq \varepsilon(s+1)^n$, $\varepsilon > 0$ beliebig
$\Rightarrow |\xi^n - a| \leq 0$, also $\xi^n = a$.

1.6.3 Fundamentaler Schluß der Analysis

Ist $b \in \mathbb{R}$ und gilt für jedes (hinreichend kleine) ε: $b \leq \varepsilon \Rightarrow b \leq 0$

Beweis: indirekt, Annahme $b > 0$: Wähle $\varepsilon \leq \frac{b}{2}$, $\varepsilon > 0 :\ b \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$ W!

1.6.4 Bemerkung

$\mathbf{Q}$ ist nicht vollständig

Beweis: Wenn $\mathbf{Q}$ vollständig wäre, so ex. $\xi = \sup\{x \in \mathbf{Q} :\ x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ in $\mathbf{Q}$. $\Rightarrow$ wie oben $\xi^2 = 2$. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Widerspruch!

1.6.5 Nachtrag

Jedes Intervall (a, b) enthält ein $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Beweis: (a, b) enthält r_1, $r_2 \in \mathbf{Q}$, $r_1 < r_2$.
$(\sqrt{2} \cdot r_1, \sqrt{2} \cdot r_2)$ enthält $r \in \mathbf{Q}$,
d. h. $\sqrt{2} \cdot r_1 < r < \sqrt{2} \cdot r_2 :\ a < r_1 < \frac{r}{\sqrt{2}} = s < r_2 < b$
$\Rightarrow s \in (a, b)$, $s = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$

1.6.6 Allgemeine Potenz

Sei $a > 0$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. Dann gilt: $a^r := \sqrt[q]{r^p}$. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung $r = \frac{p}{q}$

Beweis: Sei $\xi = \sqrt[n]{a}$. Dann ist $(\xi^n)^m = a^m$ und $\xi^{nm} = (\xi^m)^n = \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n$, also gilt: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
Setze $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, $m = kp$, $n = kq$.
Dann ist $(\sqrt[kq]{a})^{kp} = \sqrt[kq]{a^{kp}} = \sqrt[q]{a^p} = a^r$
$a^0 = 1$
$a^r = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$, falls $\frac{q}{p} = r$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$

1.6.7 Regeln für Potenzen

Seien $a, b > 0$, $r, s \in \mathbf{Q}$. Dann gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad a^r b^r = (ab)^r$$

1.6.8 Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM)

Sind $a_1, \dots, a_n \geq 0$, so gilt

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}_{\text{geometrisches}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches}}}_{\text{Mittel}}$$

„=“ genau dann, wenn $a_1 = \dots = a_n$ ist.

Beweis: für $a_j = 0 \Rightarrow$ o.k.
Seien jetzt alle $a_j > 0$, $a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$
$\alpha_j = \frac{a_j}{a}$: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$
Gilt $\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq 1$?

1.6.9 Hilfssatz

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$, so gilt: $\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq 1$ und „=“ genau dann, wenn $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$

Beweis:

- $n = 2$: $\alpha_1 = 1 - s \leq 1$
  $\alpha_2 = 1 + s \geq 1$
  $\alpha_1 \alpha_2 = (1 - s)(1 + s) = 1 - s^2 \leq 1$
  $= 1$, genau dann, wenn $s = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

- $n \mapsto n+1$: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = n+1$
  z. B. sei $\alpha_n = 1 - s \leq 1$ und $\alpha_{n+1} = 1 + t \geq 1$
  (sonst wird umnumeriert)
  $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1}, \beta_n = \alpha_n + \alpha_{n+1} > 0$
  $\beta_1 + \dots + \beta_n = n + 1 - 1$

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1} &= \underbrace{\beta_1\dots\beta_{n-1}\beta_n}_{\leq 1}\frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{\beta_n} \\
&\leq 1 \cdot \frac{(1-s)(1+t)}{1-s+t} \\
&= \frac{1-s+t-\overbrace{s\cdot c}^{\geq 0}}{1-s+t} \\
&\leq \frac{1-s+t}{1-s+t} = 1
\end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn $\beta_1 \dots \beta_n = 1$ und $st = 0$
$\iff$ $\beta_1 = \dots = \beta_n = 1$ und $st = 0$
$\iff$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 1$, $\alpha_n + \alpha n + 1 = 2$ und $s = 0 \vee t = 0$

$$s = 0: \ \alpha_n = 1, \ \alpha_{n+1} = 2 - 1 = 1$$

$$t = 0: \ \alpha_{n+1} = 1, \ \alpha_n = 2 - 1 = 1$$

Beweis (AGM) Fortsetzung:

$$a_1 \dots a_n = \alpha_1 \dots \alpha_n a^n \underbrace{\leq}_{*} a^n = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n$$

$$\iff \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Gleichheit, wenn Gleichheit bei $*$ $\iff$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, d. h. alle $a_j = a$.

1.6.10 Beispiel

Sei $a > 0$, $r = \frac{p}{q} \in (0,1)$
Dann gilt: $a^r \leq 1 + r(a-1)$ (z. B.: $a = 1 + x: \ (1+x)^r \leq 1 + rx$ für $0 < r < 1$)

Beweis:

$$\begin{aligned}
a^r = \sqrt[q]{a^p} &= \sqrt[q]{\underbrace{a\dots a}_{p\text{-mal}} \cdot \underbrace{1\dots 1}_{q-p\text{-mal}}} \\
&\underbrace{\leq}_{AGM} \frac{a + \dots a + 1 + \dots 1}{q} \\
&= \frac{pa + (q-p)}{q} = 1 + r(a-1)
\end{aligned}$$

2 Folgen und Reihen[1]

2.1 Konvergente Folgen

2.1.1 Definition: Folge

Eine Folge (a_n) ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Sie heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Schreibweise: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

2.1.2 Bemerkungen

(a) Manchmal betrachtet man Folgen (a_n), die für $n \geq p$ definiert sind, mit $p \in \mathbb{Z}$ fest.

(b) Nicht konvergente Folgen heißen *divergent*.

(c) Gilt $a_n \to 0$, $(n \to \infty)$, so heißt (a_n) *Nullfolge*.

(d) Gilt $a_n \to a$, $(n \to \infty)$, so heißt a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n).

(e) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(f) Es gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn es eine Nullfolge (b_n) gibt mit $|a_n - a| \leq b_n$ für alle n.

Beweis:

(e) Gelte $a_n \to a$, $a_n \to b$
Sei $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$
$\exists n_0 : |a_n - b| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$
$|a - b| = |(a - a_n) - (b - a_n)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow |a - b| < 2\varepsilon \Rightarrow a = b$

(f) (Andeutung)
„$\Rightarrow$“: $b_n := |a_n - a|$, zeige $b_n \to 0$.
„$\Leftarrow$“: $|a_n - a| \leq b_n \quad (n \to \infty)$

2.1.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

(1) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

(2) Konvergente Folgen sind beschränkt, d. h. es existiert ein $k > 0$ mit $|a_n| \leq k$ für alle n. D. h. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(3) Aus $a_n \to a$ folgt $\lambda a_n \to \lambda a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(4) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n + b_n \to a + b$.

[1] Version 4.6 vom 18. Dezember 2002

(5) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

(6) Aus $b_n \to b$, $b \neq 0$ folgt $b_n \neq 0$ für $n \geq p$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

(7) Aus $a_n \to a$, $b_n \to b$, $b \neq 0$ folgt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

(8) Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$, $b_n \to b$ folgt $a \leq b$.

(9) Aus $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$, $c_n \to a$ folgt $b_n \to a$.

(10) Aus $a_n \to a > 0$ folgt $a_n^r \to a^r$ $(r \in \mathbf{Q})$
[$r \in \mathbb{N}$: $a \in \mathbb{R}$ beliebig; $r \in \mathbb{Z}$: $a \neq 0$ beliebig; $r > 0$: $a = 0$, $a_n \geq 0$]

Beweis:

(1) siehe oben unter (e)

(2) Gelte $a_n \to a$:
Zu $\varepsilon = 1$ ex. n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon = 1$,
$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für $n \geq n_0$.
$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|, |a| + 1\} =: k$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(3) $\lambda = 0 \Rightarrow$: o. k.
$\lambda \neq 0$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. n_0 mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq n_0$.
$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$,
d. h. $\lambda a_n \to \lambda a$.

(4) Gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$:
Sei $\varepsilon > 0$: Dazu ex. n_0 mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \end{aligned}$$

(5) Gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$:
(a_n) und (b_n) sind beschränkt mit $|a_n| \leq A$, $|b_n| \leq B$ für alle n

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\ &\leq \underbrace{\underbrace{B\,\overbrace{|a_n - a|}^{\text{NF}}}_{\text{NF nach (3)}} + \underbrace{|a|\,\overbrace{|b_n - b|}^{\text{NF}}}_{\text{NF nach (3)}}}_{\text{NF nach (4)}} \end{aligned}$$

also: $a_n b_n \to ab$

(6) Gelte $b_n \to b$, $b \neq 0$:
Zu $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ ex. ein p mit: $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$ für $n \geq p$
$|b_n| = |(b_n - b) + b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$ für $n \geq p$
$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \leq \frac{|b - b_n|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{b^2}|b - b_n| \to 0$ $(n \to \infty)$
d. h. $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

(7) $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{\underbrace{b_n}_{\text{def. für } n \geq p}} \to a \cdot \frac{1}{b}$ nach (5) und (6)

(8) $a_n < b_n$ für alle n:
$\varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$
$|b_n - b| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$
$a - b = \underbrace{a - a_n}_{<\varepsilon} + \underbrace{a_n - b_n}_{\leq 0} + \underbrace{b_n - b}_{<\varepsilon} < 2\epsilon \quad (n \geq n_0)$
$\Rightarrow a - b \leq 0,\ a \leq b$

(9) („Sandwich-Theorem“)
$|c_n - a_n| = c_n - a_n = (c_n - a) - (a_n - a) =$ Nullfolge
$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n =$ Nullfolge
$\Rightarrow b_n - a = \underbrace{b_n - a_n}_{\text{NF}} + \underbrace{a_n - a}_{\text{NF}} =$NF
$\Rightarrow b_n \to a$

(10)
- Sei $r \in \mathbb{N}$: Induktion.
  $r = 1 :$ (o. k.: $a_n \to a$)
  $r \mapsto r + 1 :\ a_n^{r+1} = a_n \cdot a_n^r \to a \cdot a^r = a^{r+1}$
- Sei $-r \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$:
  Dann existiert $a_n \neq 0$ für $n \geq p$
  $a_n^r = \frac{1}{a_n^{-r}} \xrightarrow{\text{1.Teil und (6)}} \frac{1}{a^{-r}} = a^r.$
  $r = 0 :\ a_n^0 = 1 \to 1 = a^0.$
- $r = \frac{1}{q},\ q \in \mathbb{N} :\ a > 0,\ a_n > 0$
  $\alpha_n = \sqrt[q]{a_n} = a^{\frac{1}{q}},\ \alpha = \sqrt[q]{a}$

$$\begin{aligned} a_n - a &= \alpha_n^q - \alpha^q \\ &= |(\alpha_n - \alpha)(\alpha_n^{q-1} + \alpha_n^{q-2}\alpha + \cdots + \alpha^{q-1})| \\ &\geq |\alpha_n - \alpha| \cdot \alpha^{q-1} \\ \left| a_n^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}} \right| &\leq \frac{|a_n - a|}{\alpha^{q-1}} \end{aligned}$$

- $r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$
  $\alpha,\ \alpha_n$ werden wie vorher definiert.

$$a_n^r - a^r = a_n^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \alpha_n^p - \alpha^p$$

  Da $\alpha_n \to \alpha$ folgt $\alpha_n^p \to \alpha^p$ (siehe oben, $r \in \mathbb{N}$)
  d. h.: $a_n^r \to a^r$

$\Rightarrow a_n^r \to a^r$ für $r \in \mathbf{Q},\ a, a_n > 0$
$r > 0,\ a = 0,\ a_n \geq 0 :$
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 : |a_n| < \varepsilon^{\frac{1}{r}} \quad (n \geq n_0)$
$|a_n^r| < (\varepsilon^{\frac{1}{r}})^r = \varepsilon \quad (n \geq n_0)$, d. h. $a_n^r \to 0 = 0^r$

2.1.4 Beispiele

1. **Beh.:** $\sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$
   Beweis: $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n \geq 0$

$$n = (1+h_n)^n \underbrace{=}_{\text{bin. Satz}} \underbrace{1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} h_n^n}_{\text{alle Terme } \geq 0}$$
$$\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

   $n \geq 2$: $h_n^2 \leq \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}$
   $0 \leftarrow 0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \qquad n \geq 2,\ n = 1$
   $\Rightarrow h_n \to 0$
   $\Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1 + 0 = 1$

2. Beh.: $a^n \to 0 \quad (n \to \infty)$, falls $|a| < 1$
   Beweis: $|a| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$
   $\Rightarrow |a|^n \to 0 \quad (n \to \infty)$
   Gilt $a^n \to 0$? Allgemeiner (Satz (11)): Wenn $b_n \to b \Rightarrow |b_n| \to |b|$
   Beweis: $||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| \to 0 \quad (n \to \infty)$
   Umkehrung gilt für $b = 0 : |b_n - b| = |b_n - 0| = |b_n| \to 0$

3. Beh.: $a_n = \sqrt[n]{a} \to 1$, falls $a > 0$
   Beweis: Wähle m so, daß $a < m$ und $\frac{1}{a} < m$.

$$\frac{1}{m} < a < m : \ n \geq m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < a < n \text{ gilt nur für } n \geq m$$
$$\Rightarrow \quad 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \to 1$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$$

4.

$$\begin{aligned} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) &= n \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= n \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2 Monotone Folgen

2.2.1 Definition

Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend* [*fallend*], wenn $a_n \leq a_{n+1} [a_n \geq a_{n+1}]$
Eine Folge (a_n) heißt *streng wachsend* [*fallend*], wenn $a_n < a_{n+1} [a_n > a_{n+1}]$
kurz: $a_n \uparrow,\ a_n \downarrow$

2.2.2 Monotoniekriterium

Ist (a_n) monoton (wachsend oder fallend) und beschränkt, so ist sie auch konvergent. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } a_n \uparrow \\ \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } a_n \downarrow \end{cases}$$

Beweis: Für $a_n \uparrow$. Sei $a = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$
Sei $\varepsilon > 0$: Damit existiert n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$
Für $n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$
$|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$
d. h. $a_n \to a$.

Bemerkung: $a_n \uparrow [a_n \downarrow] \Rightarrow a_n \geq a_1 [a_n \leq a_1]$
Eine monotone Folge ist einseitig beschränkt.

2.2.3 Aufgabe

Sei $b_0 > a_0 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ und $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
Zeige: $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_n < b_n$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = M(a_0, b_0)$$

2.2.4 3 Beispiele

1. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = 2.718\ldots$
   Zeige mehr: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
   $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ $n \geq 2$
   $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$
   $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_1 \leq a_n \leq b_1$, $a_1 \leq b_n \leq b_1$
   Beweis:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n-\text{mal}} \cdot 1 \\
&\underbrace{\leq}_{\text{AGM}} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n + 1 + n\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1 \\
&\underbrace{\leq}_{\text{AGM}} \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{b_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\geq 2:\ \frac{a_n}{b_n} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1 \\
\Rightarrow a_n &< b_n
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren
$\frac{a_n}{b_n} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right) > 1 - n\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$
$\Rightarrow \underbrace{b_n\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to b} < a_n < \underbrace{b_n}_{\to b}$
$\Rightarrow a_n \to b$

2. Newton-Verfahren zur Berechnung der Wurzel $\sqrt[p]{a}$, $a>0$, $p\geq 2$ ganz.
   $a_0 > 0$ beliebig, $a_{n+1} = \frac{(p-1)a_n^p + a}{pa_n^{p-1}}$
   Behauptung: $a_n \to \sqrt[p]{a}$
   Zeige mehr:
   1) $a_n \geq 0$ (Aufgabe für uns)
   2) $a_n^p \geq a$ für $n \geq 1$
   3) $a_n \downarrow$ und $a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existiert

   Beweis:

   2)

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^p &= \left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a_n + \frac{a}{pa_n^{p-1}}\right)^p \\
&= a_n^p\left(1-\frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{a_n^p}\right)\right)^p \\
&\underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \left(1-p\cdot\frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{a_n^p}\right)\right)a_n^p \\
&= a_n^p\frac{a}{a_n^p} = a
\end{aligned}$$

   3) $a_{n+1} - a_n = \frac{(p-1)a_n^p + a}{pa_n^{p-1}} - a_n = \frac{\overbrace{a - a_n^p}^{\leq 0}}{pa_np-1} \leq 0$
   d. h.: $a_{n+1} \leq a_n$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p-1)\overbrace{a_n^p}^{\to\alpha^p}+a}{p\underbrace{a_n^{p-1}}_{\to\alpha^{p-1}}}$$

$$\alpha = \frac{(p-1)\alpha^p+a}{p\alpha^{p-1}} \iff -\alpha^p + a = 0 \iff \alpha = \sqrt[p]{a}, \text{ da } \alpha > 0$$

3. $0 < a_0 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$
   Zeige: $0 < a_n < \frac{1}{2}$
   $n = 0$: o. k.

$$\begin{aligned} n \mapsto n+1: \ a_{n+1} &= a_n^2 + \frac{1}{4} \quad \left(\geq \frac{1}{4} > 0\right) \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n^2 + \frac{1}{4} - (a_{n-1}^2) + \frac{1}{4} \\ &= a_n^2 - a_{n-1}^2 \\ &= (a_n - a_{n-1})\underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{>0} \end{aligned}$$

   (a_n) ist monoton. Für uns die Aufgabe: in welche Richtung $\uparrow\downarrow$?
   $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4} = \alpha^2 + \frac{1}{4}$
   $\iff \alpha = \alpha^2 + \frac{1}{4}$
   $\iff \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$
   $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

2.3 Teilfolgen

2.3.1 Definition

Sei (a_n) eine Folge. Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ ($n_k \in \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$), dann heißt (a_{n_k}) eine *Teilfolge* von (a_n) $(k \to a_{n_k})$. $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert von (a_n), wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

2.3.2 Beispiele

1. $a_n \to a$ konvergiert, a ist einziger Häufungswert:
   $a_{n_k} \to a$ für jede (n_k).
   Beweis: $\varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq m_0$
   Wähle k_0 so, daß $n_{k_0} \geq m_0$:
   $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_{k_0} \geq m_0 : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

2. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
   $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty)$
   $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \to -1 \quad (k \to \infty)$
   Die Häufungswerte sind -1, 1.

3.

$$1 < a_0 \leq 2: \; a_{n+1} = \begin{cases} 4a_n & \text{falls } a_n \leq 4 \\ \frac{1}{2}a_n & \text{falls } a_n > 4 \end{cases}$$

$(a_0, 4a_0, 2a_0, 8a_0, 4a_0, \ldots)$
Häufungswerte sind $2a_0$, $4a_0$, $8a_0$

2.3.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge, d. h. mindestens einen Häufungswert.
(Zu-)Satz: (a_n) entält eine monotone Teilfolge, und besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungswert.

Beweis: (von Polya)
$m \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt, wenn für alle $n > m$ $a_n < a_m$ ist.

1. Fall: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte $m_1 < m_2 < \ldots$.
(a_{m_k}) ist streng monoton fallend, beschränkt.
$\lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} =: \bar{a}$ existiert
Sei (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge mit $a_{n_k} \to a$
Für $n_j \geq m_1$ existiert dann m_{k_j} mit $m_{k_j} \leq n_j < m_{k_j+1}$.
Damit gilt: $a \leftarrow a_{n_j} \leq a_{m_{k_j}} \to \bar{a}$
$\Rightarrow a \leq \bar{a}$ $\quad$ $\bar{a}$ ist größter Häufungswert.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele (oder gar keine) Gipfelpunkte.
$\Rightarrow \exists$ Gipfelpunkt m_1 mit $m_1 >$ alle Gipfelpunkte.
Wähle $m_2 > m_1$ minimal aus, so daß $a_{m_2} \geq a_{m_1}$ ist. m_2 ex., da m_1 kein Gipfelpunkt ist.
Wähle $m_3 > m_2$ minimal aus, so daß $a_{m_3} \geq a_{m_2}$ ist. m_3 ex., da m_2 kein Gipfelpunkt ist.
$\vdots$ usw.
$(a_{m_k}) \uparrow$ und ist beschränkt.
$\Rightarrow (a_{m_k})$ ist konvergent, also $a_{m_k} \to \bar{a}$ (Häufungswert).
Sei a irgendein Häufungswert mit $a_{n_j} \to a$ für $(j \to \infty)$. Zu j mit $n_j > m_1$ ex. ein $k_j: \; m_{k_j} \leq n_j < m_{k_j+1}$
$a \leftarrow a_{n_j} \leq a_{m_{k_j+1}} \to \bar{a}$
$a < \bar{a}$ $\quad$ $\bar{a}$ ist größter Häufungswert

Beweis für den kleinsten Häufungswert: selber machen über $(-a_n)$.

2.3.4 Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß für alle $n > m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Jede Cauchyfolge ist auch eine konvergente Folge, und umgekehrt.

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: Sei $a_n \to a$ $(n \to \infty)$
  $\varepsilon > 0$: es existiert $n_0: \; |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$
  $n > m \geq n_0: \; |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

- „⇒“: (a_n) Cauchyfolge.
  $\varepsilon = 1: \ |a_n - a_m| < 1$ für $n > m \geq n_0$
  $\Rightarrow |a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq 1 + |a_0|$ für $n \geq n_0$
  (a_n) ist beschränkt.
  (a_n) hat konvergente Teilfolge, $a_{n_k} \to a$.

  $\varepsilon > 0:$ Dann ex. $k_0: \ |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$
  Es ex. $n_0: \ |a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$
  $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} + a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} + a| < 2\varepsilon$
  für $n \geq n_0$, $k \geq k_0$, $n_k \geq n_0$
  $\Rightarrow a_n \to a$

2.3.5 Definition: Limes superior, Limes inferior

Sei (a_n) eine beschränkte Folge.
Der größte Häufungswert heißt *oberer Limes* oder *limes superior*,
kurz: $\limsup_{n\to\infty} a_n$ oder $\overline{\lim}\, a_n$.
Der kleinste Häufungswert heißt *unterer Limes* oder *limes inferior*,
kurz: $\liminf_{n\to\infty} a_n$ oder $\underline{\lim}\, a_n$.

2.3.6 Bemerkungen

(a) (a_n) ist konvergent $\iff \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

(b) $\overline{\lim}\, a_n = \bar{a}$ ist charakterisiert durch:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

  (i) $a_n > \bar{a} + \varepsilon$ gilt nur für endlich viele n.

  (ii) $a_n > \bar{a} - \varepsilon$ gilt für unendlich viele n.

(c) $\underline{\lim}\, a_n = \underline{a}$ ist charakterisiert durch:
für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

  (i) $a_n < \underline{a} - \varepsilon$ gilt nur für endlich viele n.

  (ii) $a_n < \underline{a} + \varepsilon$ gilt für unendlich viele n.

Beweis: (von (b))

„⇐“: Sei $\bar{a} = \overline{\lim}\, a_n$.
$\bar{a}$ ist der größte Häufungswert von (a_n) , d. h. es gibt keinen größeren Häufungswert, d. h. es gilt (i).
Da $\bar{a}$ Häufungswert ist, existiert (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \bar{a}$.
Zu $\varepsilon > 0$ ex. k_0 mit $|\bar{a} - a_{n_k}| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$.

„⇒“: $\bar{a} \in \mathbb{R}$ erfülle (i) und (ii).
Sei $\varepsilon > 0$:

1. $\Leftarrow$ kein Häufungswert von (a_n) ist $\geq \bar{a} + \varepsilon$.
   Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist kein Häufungswert $> \bar{a}$, also sind alle $\leq \bar{a}$.

2. Für unendlich viele n gilt $a_n > \bar{a} - \varepsilon$.
   Es gibt also einen Häufungswert $\geq \bar{a} - \varepsilon$.
   Also gibt es einen Häufungswert $\geq \bar{a}$.

Aus (i) und (ii) folgt: $\bar{a} = \overline{\lim}\, a_n$.

2.3.7 Beispiel

Sei $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+(-1)^n n}}$. Setze $n = 2m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \sqrt[2m]{2^{2m} + 3^{2m+2m}} \\ &= \sqrt[2m]{2^{2m} + 3^{4m}} \\ &= 9 \underbrace{\sqrt[2m]{\underbrace{1 + \underbrace{\left(\frac{2}{9}\right)^{2m}}_{\to 0}}_{\to 1}}}_{\to 1} \to 9 \end{aligned}$$

für $n = 2m + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \sqrt[2m+1]{2^{2m+1} + 3^0} \\ &= \sqrt[2m+1]{2^{2m+1} + 1} \\ &= 2 \sqrt[2m+1]{1 + \frac{1}{2^{2m+1}}} \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

Es ist $\overline{\lim}\, a_n = 9$, $\underline{\lim}\, a_n = 2$ und es existieren keine anderen Häufungswerte.

2.3.8 Rechenregeln

(1) Aus $a_n \leq b_n$ für alle n folgt: $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$ und $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$

(2)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad &\underbrace{\leq}_{(i)} \quad \underline{\lim}(a_n + b_n) \\ &\leq \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) \\ &\underbrace{\leq}_{(ii)} \quad \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \end{aligned}$$

Wenn eine der beiden Folgen konvergiert, so gilt „=“ in (i) und (ii)

(3) $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$ und $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$

Beweis: als Aufgabe.

2.3.9 Ergänzungen

Sei (a_n) eine beliebige Folge.

(a) $a_n \to \infty$ $[a_n \to -\infty]$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $[-\infty]$ bedeutet folgendes:
Zu jedem $K > 0$ gibt es ein n_0 mit $a_n > K$ $[a_n < -K]$ für alle $n \geq n_0$. (Man sagt: (a_n) *divergiert* gegen ∞.)

(b) ∞ $[-\infty]$ ist Häufungswert von (a_n), wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt, die mit $a_{n_k} \to \infty$ $[-\infty]$ divergiert.

(c) $\overline{\lim} = \infty$ $[-\infty]$, wenn ∞ $[-\infty]$ Häufungswert ist, d. h. wenn die Folge nicht nach oben [unten] beschränkt ist.

(d) $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$, wenn $a_n \to -\infty$, beziehungsweise $\underline{\lim}\, a_n = +\infty$, wenn $a_n \to +\infty$.

2.3.10 Satz

Sei (a_n) eine beschränkte Folge, $\alpha_n := \sup\{a_m : m \geq n\}$, $\beta_n := \inf\{a_m : m \geq n\}$.
Dann gilt folgendes: $\alpha_n \downarrow, \beta_n \uparrow$ beschränkt, und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \overline{\lim}\, a_n \\ \lim_{n\to\infty} \beta_n &= \underline{\lim}\, a_n \end{aligned}$$

Beweis: für (α_n): Sei $\bar{a} = \overline{\lim}\, a_n$, $M_n = \{a_m : m \geq n\}$
$M_{n+1} \subseteq M_n \Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$
es gibt $K : |a_n| \leq K$ für alle n, also insbesondere $a_n \leq K$ für alle n, K ist obere Schranke für $M_n, \alpha_n \leq K$
(genauso: $+a_n \geq -K$, also $\alpha_n \geq -K$)

$$\begin{aligned} a_n \in M_n &\Rightarrow a_n \leq \alpha_n \\ &\Rightarrow \bar{a} \leq \overline{\lim}\, \alpha_n \\ &\Rightarrow \boxed{\bar{a} \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0 :$ Dann gilt für alle $n \geq n_0 : a_n < \bar{a} + \varepsilon$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 : &\Rightarrow \alpha_n \leq \bar{a} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \bar{a} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \bar{a}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \overline{\lim}\, a_n$.

2.4 Unendliche Reihen

2.4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge und $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Die Folge (s_n) heißt *unendliche Reihe*. Schreibweise: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ existiert. s heißt dann *Wert* der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

s_n heißt n-te Partialsumme von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Nicht konvergente Reihen nennt man divergent.

2.4.2 Beispiel: Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$ ($a \in \mathbb{R}$ gegeben).

für $|a| < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, für $|a| \geq 1$ ist diese Reihe divergent.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\
&= 1 + a(1 + a + \cdots + a^{n-1} + a^n - a^n) \\
&= 1 + as_n - a^{n+1} \\
\Rightarrow (1-a)s_n &= 1 - a^{n+1} \\
\Rightarrow s_n &= \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \qquad , a \neq 1 \\
s_n &= n + 1 \qquad , a = 1
\end{aligned}$$

$|a| < 1 : a^{n+1} \to 0, s_n \to \frac{1}{1-a}$
$|a| > 1 : |a|^{n+1} \to \infty, (s_n)$ nicht konvergent,
auch für $a = 1$ und $a = -1$ (bei $a = -1$ ist $s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1$).

2.4.3 Beispiel: Teleskopsumme

$b_n \to 0, \quad a_n = b_n - b_{n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \quad \text{(„Teleskopsumme“)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n &= (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_0 - b_{n+1} \to b_0 \end{aligned}$$

Beispiel für eine Teleskopsumme:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} : \qquad \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{0+1} = 1$$

2.4.4 Beispiel: erweiterte Teleskopsumme

Sei $b_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $p \in \mathbb{N}$ fest.
$a_n = b_n - b_{n+p}$. Dann gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n &= b_0 - b_p + b_1 - b_{p+1} + \cdots + b_n + b_{n+p} \\ &= b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1} - (b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}) \\ &\to b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1} \end{aligned}$$

Beispiel für eine erweiterte Teleskopsumme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

Hier ist $b_n = \frac{1}{n+1}$ und $p = 2$

2.4.5 Satz über den Reihenrest

Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt: $a_n \to 0$ und $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$ für $n \to \infty$. r_n heißt *Reihenrest.*

Beweis:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

$$r_n = s - s_n \to s - s = 0.$$

2.4.6 Cauchykriterium

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit: $\left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$.

Beweis: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

(s_n) konvergiert $\iff$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein n_0 mit

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n > m \geq n_0$

2.4.7 Beispiel: Die harmonische Reihe

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Beweis:

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} > m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

Da es für $\varepsilon < 1/2$ kein n_0 mehr gibt $\Rightarrow$ Divergenz nach Cauchykriterium.

2.4.8 Hilfssatz: Abelsche partielle Summation

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k, \quad (B_k = \sum_{j=m}^{k} b_j)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \quad - a_m \underbrace{B_{m-1}}_{=0}
\end{aligned}$$

2.4.9 Dirichlet-Kriterium

Es sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, (b_k) eine Folge mit beschränkten Partialsummen (d. h. $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right| \leq B$ für alle n). Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis: Setze
$$B_k = \sum_{j=0}^{k} b_j.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\underbrace{a_n}_{\geq 0}(B_n - B_m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0}(B_k - B_m)\right| \\
&\leq |(B_n - B_m)|\, a_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} |B_k - B_m|(a_k - a_{k+1}) \\
&\leq 2B\left(a_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\right) \\
&= 2B(a_n + a_{m+1} - a_n) \\
&= 2Ba_{m+1}
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$: Man wähle n_0 so, daß $a_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2B}$ für alle $m \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| < 2B\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \quad \text{für } n > m \geq n_0$$

$\Rightarrow$ konvergent nach Cauchykriterium.

2.4.10 Leibniz-Kriterium

Es sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Ihr Wert liegt zwischen s_{2n} und s_{2n+1} für alle n.

Beweis: Setze $b_k = (-1)^k$ und $B_k = \sum\limits_{j=0}^{k} b_j$. Es ist $B_k = 0$ oder $B_k = 1$, d. h. B_k ist beschränkt, also konvergiert
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

$$\begin{aligned}
s_{2n+2} - s_{2n} &= (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \qquad s_{2n} \downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2n+1} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\
&= s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}
\end{aligned}$$

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

2.4.11 Die alternierende harmonische Reihe (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{konvergiert nach Leibnizkriterium.}$$

$$\begin{aligned} \text{z. B. } s_{100} &= 0,688\ldots \\ s_{101} &= 0,698\ldots \end{aligned}$$

2.4.12 Rechenregeln für konvergente Reihen

Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Beweis: Dies hier sind Folgen von Partialsummen

2.4.13 Die alternierende harmonische Reihe (2)

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - + \ldots$$

Reihenwert s: $s < 1 - 1/2 + 1/3 = 5/6$
Umordnung von $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$: $1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \ldots$ hier: $s > 5/6$, d. h. Umordnungen bei Reihen können den Reihenwert verändern

2.5 Absolute Konvergenz

2.5.1 Definition

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{konvergent, aber nicht absolut}$$

2.5.2 Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent

Beweis:

$$\varepsilon > 0. \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > m \geq n_0,$$

also Konvergenz nach Cauchykriterium

2.5.3 Majorantenkriterium

Gilt $|a_k| < c_k$ für alle k, und ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. (Man nennt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ eine *Majorante* für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$!)

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert:

$$a_k = \frac{1}{k^2} \qquad a_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = c_k \qquad (k \geq 2)$$

$$a_1 = 1 = c_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 = 2$$

2.5.4 Wurzelkriterium

Gilt $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis: Wähle q so, daß $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$ ist. Dann ist für $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Damit ist $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$ bzw.

$$|a_n| \leq C \cdot q^n$$

für alle n. Dabei wird C geeignet gewählt. Setze nun $c_n = C \cdot q^n$. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

als geometrische Reihe eine konvergente Majorante.

2.5.5 Quotientenkriterium

Gilt $a_n \neq 0$ für alle n und ist $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Wähle q so, daß $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \text{für } n \geq n_0$$

Multipliziere diese Werte nun für $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, m-1$ auf:

$$\prod_{k=n_0}^{m-1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q^{m-n_0}$$

Ausgeschrieben ist dies:

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \cdot \frac{a_m}{a_{m-1}}\right| = \left|\frac{a_m}{a_{n_0}}\right| \leq q^{m-n_0}$$

$$|a_m| \leq |a_{n_0}| q^{-n_0} q^m \text{ für } m > n_0$$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} \leq q \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_{n_0}| q^{-n_0}} = q < 1$$

2.5.6 Beispiele

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^\alpha q^n}_{a_n}$ ist absolut konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$

Beweis Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^\alpha} \cdot |q| \quad \to \quad |q| < 1$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |q| < 1$$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert absolut, für $a \in \mathbb{R}$

Beweis: $a = 0$ o.k.

$$a \neq 0: \quad \frac{a^n}{n!} \neq 0 \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a| \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

(3) Die Binomische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n$ ist absolut konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|a| < 1$.

Beweis:

$$a_n = a^n \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|a\frac{1}{n+1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right| \\ &= |a| \underbrace{\frac{1}{n+1}|\alpha-n|}_{\to 1} \to |a| < 1 \end{aligned}$$

Sonderfälle: $a = 0$ trivial, $\alpha \in \mathbb{N}_0$: endliche Summe.

2.5.7 Satz

Für $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ hat jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Form

$$a = \operatorname{sign}(a)\left([|a|] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}\right)$$

mit $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man „$a_n = p-1$ für $n \geq n_0$“ verbietet.

Beweis: für $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned} \text{setze } a_1 &= [p_a], r_1 = a - \frac{a_1}{p} \\ a_2 &= [p^2 r_1], r_2 = r_1 - \frac{a_2}{p^2} \\ a_3 &= [p^3 r_2], r_3 = r_2 - \frac{a_3}{p^3} \\ &\vdots \\ a_n &= [p^n r_{n-1}], r_n = r_{n-1} - \frac{a_n}{p^n} \end{aligned}$$

$$a = \frac{a_1}{p} + r_1 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + r_2 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} + r_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k}$$

Mit Induktion: $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad 0 \leq r_n \leq p^{-n}, \quad r_n \geq r_{n+1}$

n=0:

$$a_0 := 0, r_0 := a, \text{d.h.} 0 < r_0 < 1 = p^{-0}$$

$$r_1 = a - \frac{a_1}{p} \leq 0$$

n↦n+1: $a_{n+1} = [p^{n+1} r_n] \geq 0$, da $r_n \geq 0$

$$\text{da } r_n < p^{-n} \Rightarrow p^{n+1} r_n < p^{n+1} p^{-n} = p$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < p, \text{ also } a_{n+1} \leq p-1.$$

$$r_{n+1} = r_n - \underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{\geq 0} \leq r_n$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p^{n+1} r_{n+1} &= p^{n+1} r_n - a_{n+1} \\ &= p^{n+1} r_n - [p^{n+1} r_n] < 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq r_{n+1} < \frac{1}{p^{n+1}}$$

Eindeutigkeit:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{p^k}$$

Annahme: Es gibt verschiedene Darstellungen.
Dann ex. m: $a_k = b_k$ für $1 \leq k < m, a_m \neq b_m$, z.B. Sei $a_m > b_m$

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{p^k} &= \frac{\overbrace{a_m - b_m}^{\geq 1}}{p^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\overbrace{a_k - b_k}^{\geq -(p-1)}}{p^k} \\ &\geq \frac{1}{p^m} - (p-1) \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{p^k} \\ &= \frac{1}{p^m} - (p-1) \frac{1}{p^{m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j} \\ &= \frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}} (p-1) \frac{1}{1 - 1/p} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_m - b_m = 1, a_k - b_k = -(p-1) \text{ für } k > m :$$

$$a_k = 0, b_k = p - 1 \text{ für } k > m$$

2.5.8 Satz

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Eine Menge ist endlich oder unendlich: Eine unendliche Menge M, heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung von M auf $\mathbb{N}$ gibt, sonst heißt sie *überabzählbar*

Beweis: Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar

$$]0,1[\cap \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{10^k} \text{ („eindeutige“ Darstellung)}$$

$$a_n = \begin{cases} 8, & \text{wenn } a_{n,n} = 0 \\ 0, & \text{wenn } a_{n,n} \neq 0 \end{cases}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \in]0,1[, \text{ d.h. } x = x_m \text{ für ein } m$$

$$\Rightarrow a_k = a_{m,k} \text{ für alle } k$$

Widerspruch: die neue Zahl ist nicht in der Menge von oben.

2.6 Mehrfachreihen

Bisher wurden Reihen der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ betrachtet.
Dabei war die Summationsreihenfolge vorgegeben und wesentlich. Hier im Abschnitt 2.6:

- allgemeine Reihen, etwa $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$
- Zusammenhang zwischen „absoluter Konvergenz“ und „Umordnen der Reihe“

2.6.1 Definition

Sei Λ eine beliebige Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein $a_\lambda \geq 0$ gegeben.
Für jede *endliche* Menge $E \subseteq \Lambda$ sei $S(E) := \sum\limits_{\lambda \in E} a_\lambda$ (dabei ist $s(\emptyset) = 0$).
Falls $\{S(E) | E \subseteq \Lambda \text{ endlich}\}$ beschränkt ist, so sei

$$S(\Lambda) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup\{S(E)\colon E \subseteq \Lambda \text{ endlich}\}$$

2.6.2 Beispiel

Sei $a_k \geq 0$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. Hier also: $\Lambda = \mathbb{N}_0$.
Dann ist

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis: Sei $E \subseteq \Lambda$ beliebig, endlich. Dann existiert ein n mit $E \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$\Rightarrow S(E) = \sum_{k \in E} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\text{d. h. } \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \text{ist wohldefiniert und ist } \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

noch z. z.: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} a_k$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = s(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k$$

2.6.3 Folgerung

Ist $a_k \geq 0$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv, dann konvergiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(x)} \text{ mit dem Wert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(x)}$ heißt „Umordnung“

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = \sum_{\varphi(k) \in \mathbb{N}_0} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

2.6.4 Umordnungssatz

Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut* konvergent und $(a_{\varphi(k)})$ eine beliebige Umordnung von (a_k), dann ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(x)}$ absolut konvergent und es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Schreibweise: Für $c \in \mathbb{R}$ sei $c^+ := \max(c, 0)$ und $c^- := \max(-c, 0)$
Damit gilt: $c = c^+ - c^-$ sowie $c^+ \leq |c|$, $c^- \leq |c|$

Beweis: Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und $a_k^+ \leq |a_k|, \quad a_k^- \leq |a_k|$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \text{ konvergieren}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^-$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^-$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}^-$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

2.6.5 Hilfssatz

Sei $\Lambda = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Lambda_j$ mit $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

Beweis: Zuerst „$\leq$“: Es ist

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \leq \infty.$$

$\varepsilon > 0$: Wähle zu jedem $j = 0, 1, 2, \ldots$ eine endliche Menge $E_j \subseteq \Lambda_j$ mit

$$S(E_j) > \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda - \varepsilon \cdot 2^{-j}$$

$E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n \subseteq \Lambda$ endlich.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda &< \sum_{j=0}^{n} S(E_j) + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon \cdot 2^{-j} \\
&= S(E) + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} 2^{-j} \\
&\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\text{d. h.: } \sum_{j=0}^{n} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + 2\varepsilon \text{ für alle } n \text{ und alle } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

Umkehrung: $\geq$

$$E \subseteq \Lambda \text{ endlich}$$

$$E_j = E \cap \Lambda_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nur endlich viele E_j sind $\neq \emptyset$

$$S(E) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in E_j} a_\lambda \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup_E (S(E)) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda.$$

2.6.6 Definition

Sei $c \in \mathbb{R}$: $c^+ = \max\{0, c\}$ positiver Anteil, bzw. $c^- = \max\{0, -c\}$ negativer Anteil

$c \geq 0 : \; c^+ = c, \; c^- = 0$

$c < 0 : \; c^+ = 0, \; c^- = c$

$c^+ - c^- = c$

Sei $\Lambda \neq \emptyset$, $c_\lambda \in \mathbb{R}$ für jedes $\lambda \in \Lambda$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ \text{ und } \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^- \text{ seien erklärt}$$

$$\text{Man setzt } \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^-$$

2.6.7 Großer Umordnungssatz

Sei $\Lambda = \bigcup\limits_j \Lambda_j$ (endlich oder unendlich) mit $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ $(j \neq k)$. Dann gilt

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_j$$

sofern eine der beiden Seiten existiert.

Beweis:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^\pm = \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^\pm \quad \text{(Hilfssatz)}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^- = \sum_j \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^- \right)$$

2.6.8 Spezialfall: Doppelreihensatz

$(\Lambda = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$

$$\begin{aligned}
\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} c_{j,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} \text{ Zeilensummen} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k} \text{ Spaltensummen} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(j,k):j+k=n} c_{j,k} \text{ Diagonalsummen} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(j,k):\max(j,k)=n} c_{j,k} \text{ Quadratsummen}
\end{aligned}$$

falls eine der 5 Summen existiert, mit c_{j_k} durch $|c_{j_k}|$ ersetzt.

Beweis: $\Lambda = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

1. $\Lambda_j = \{(j,k) :\ k \in \mathbb{N}_0\}$
2. $\Lambda_k = \{(j,k) :\ j \in \mathbb{N}_0\}$
3. $\Lambda_n = \{(j,k) :\ j+k = n\} = \{(0,n), (1,n-1), \ldots, (n,0)\}$
4. $\Lambda_n = \{(j,k) :\ \max\{j,k\} = n\} =$
   $\{(0,n), (1,n), \ldots, (n-1,n), (n,n), (n,0), \ldots, (n,n-1)\}$

2.6.9 Beispiele

(0) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

(1) $\sum\limits_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{j^2+k^2}$ existiert nicht
Beweis: Quadratsummen
$n \geq 1 :\ \sum\limits_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \leq \frac{1}{n^2} \cdot$Anzahl der Summanden
$\geq \frac{1}{2n^2} \cdot$Anzahl der Summanden
$(j^2+k^2 \geq n^2, \quad j^2+k^2 \leq 2n^2)$
$\sum\limits_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \geq \frac{1}{2n^2}(2n-1) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\sum\limits_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \Big)$ divergiert,
weil $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum \frac{1}{2n^2}$ konvergiert

(2) $\sum\limits_{j,k\geq 1} \frac{1}{j^3+k^3}$ existiert
Beweis: Quadratsummen

$$\sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^3+k^3} \leq \frac{1}{n^3} \cdot (2n-1) < \frac{2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^3+k^3} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 4$$

(3) $\sum\limits_{j,k\geq 2} \frac{1}{j^k} = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^k &= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{k+2} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 2 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\binom{n}{m}2^{-n-m} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{-m}\right)2^{-n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2^{-n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-3/4} = 4\end{aligned}$$

2.6.10 Reihenmultiplikation/Cauchyprodukt

Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut und heißt Cauchyprodukt

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_n b_k\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n+k=m} a_n b_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n+k=m} a_n b_k &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_{m-1} b_1 + a_m b_0\\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} = c_m\end{aligned}$$

Gerechtfertigt, weil $\sum\limits_{n,k} |a_n||b_k|$ existiert

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\le n\le N\\ 0\le k\le K}} |a_n||b_k| &= \sum_{n=0}^{N}|a_n|\sum_{k=0}^{K}|b_k|\\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{k=0}^{\infty}|b_k| = M\\ \Rightarrow \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}|a_n b_k| &\le M\end{aligned}$$

2.6.11 Beispiel

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{a^j}{j!}\frac{a^{n-j}}{(n-j)!}\frac{n!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)^n}{n!}\end{aligned}$$

3 Grenzwert und Stetigkeit[1]

3.1 Grenzwerte bei Funktionen

In diesem Abschnitt gilt: I ist immer ein beliebiges Intervall, $x_0 \in I$ oder einer der Endpunkte.

3.1.1 Definition

Sei I Intervall, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ oder Endpunkt von I und $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
$c \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* von f für $x \to x_0$, geschrieben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to x_0$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

3.1.2 Bemerkungen

(1) Der Grenzwert c ist eindeutig bestimmt.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ bedeutet: f ist definiert auf $I = (a, \infty)$ oder $[a, \infty)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $k > a$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x > k$.

(3) entsprechend: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3.1.3 Folgenkriterium

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.
Dieser Grenzwert ist dann unabhängig von (x_n) und gleich $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ existiere, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.
(x_n) ist Folge in $I \setminus \{x_0\}$. $x_n \to x_0 \Rightarrow$ es gibt ein n_0 mit $0 < |x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq n_0$.
$\Rightarrow |f(x_n) - c| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, d. h. $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$.

„$\Leftarrow$" „Alle $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existieren"
Setze $c := \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. ($(x_n)$ ist feste Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$).
(ξ_n) ist Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $\xi_n \to x_0$.
Die Mischfolge $(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots) = (y_n)$ ist Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $y_n \to x_0$.
$\lim\limits_{n\to\infty} (y_n)$ existiert und ist $= \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c = \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$.
Also: $f(\xi_n) \to c$ für $n \to \infty$.
Annahme: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiere nicht (oder ist $\neq c$).

[1]Version 4.9 vom 18. Dezember 2002

$\Rightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$, d. h. $x_n \to x_0$, also $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$.
Widerspruch!

3.1.4 Rechenregeln

Wenn $f(x) \to \alpha$ für $x \to x_0$ und $g(x) \to \beta$ für $x \to x_0$, so gelten

(1) $f(x) + g(x) \to \alpha + \beta$.

(2) $\lambda f(x) \to \lambda\alpha$.

(3) $f(x)g(x) \to \alpha\beta$.

(4) $|f(x)| \to |\alpha|$.

(5) $\alpha \leq \beta$, falls $f(x) \leq g(x)$ in $I \setminus \{x_0\}$.

(6) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\alpha}{\beta}$, falls $\beta \neq 0$.
Genauer: Es gibt ein $\sigma > 0$ mit $g(x) \neq 0$ in $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \cap I \setminus \{x_0\}$.
$\frac{f(x)}{g(x)}$ ist dort definiert und hat den Grenzwert $\frac{\alpha}{\beta}$ für $x \to x_0$

Beweis: von (1)–(5): Folgenkriterium
von (6): Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |\beta| > 0$.
Dazu ex. ein $\sigma > 0$ mit $|g(x) - \beta| < \frac{1}{2}|\beta|$ für $0 < |x - x_0| < \sigma$, $x \in I$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |g(x)| = |\beta + (g(x) - \beta)| &\geq |\beta| - |g(x) - \beta| \\ &> |\beta| - \frac{1}{2}|\beta| = \frac{1}{2}|\beta| \end{aligned}$$

Dann Folgenkriterium.

3.1.5 Beispiele

(0) Ist $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

(1) $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ (Zu $\varepsilon > 0$ setze $\sigma = \varepsilon$).

(2) Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p$ ein Polynom vom Grad p mit $a_p \neq 0$ und $a_j \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_p x_0^p = f(x_0)$
Über Induktion: $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$.

(3) Ist $f(x) = [x] =$ die größte Ganze Zahl $\leq x$, so ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, falls $x_0 \notin \mathbb{Z}$. Der Limes existiert nicht für $x_0 \in \mathbb{Z}$.

(4) Es gilt: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^r - 1}{x - 1} = r$ für $r \in \mathbf{Q}$.
Beweis: Für $r \in \mathbb{N}$:

$$x^r - 1 = (x - 1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + x + 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^r - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^{r-1} + \cdots + x + 1) = r \cdot 1 = r$$

3.1.6 Einseitige Grenzwerte

Sei $I = (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ und $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
Setze $f_-(x) = f(x)$ für $a < x < x_0$ und $f_+(x) = f(x)$ für $x_0 < x < b$.
Dann ist $f(x_{0\pm}) := \lim\limits_{x \to x_0} f_\pm(x)$, falls der rechtsstehende Grenzwert existiert.
Schreibweise: $f(x_{0\pm}) = \lim\limits_{x \to x_{0\pm}} f(x)$.
Bezeichnung: linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert.
Beispiel: $f(x) = [x]$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_{0+})$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_{0-})$ existieren immer.

3.1.7 Satz

$f(x_{0+}) = f(x_{0-}) = c \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es ist $|f(x) - c| < \varepsilon$ für $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ (rechtsseitig) und für $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ (linksseitig).
Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann ist $|f(x) - c| < \varepsilon$ für $x \in I \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta$.

3.1.8 Monotone Funktionen

$f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend [fallend], wenn aus $x < y$ $(x, y \in I)$ folgt:
$f(x) \leq f(y)$ $[f(x) \geq f(y)]$.
f heißt streng wachsend [fallend], wenn immer $<$ anstelle $\leq$, bzw. $>$ anstelle $\geq$ gilt.

3.1.9 Satz

Monotone Funktionen haben in jedem Punkt $x_0 \in I$ einseitige Grenzwerte.
Sei z. B.: $a < x_0 < b$ und f wachsend: $f(x_{0-}) \leq f(x_0) \leq f(x_{0+})$.

Beweis: Sei (x_n) Folge in (a, x_0) mit $x_n \uparrow$ und $x_n \to x_0$.
Dann ist $(f(x_n))$ wachsend und beschränkt: $f(x_n) \leq f(x_0)$. Damit existiert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x_0)$.
Nach dem modifizierten Folgenkriterium folgt dann:
Existiert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ für jede Folge (x_n) in (a, x_0) mit $x_n \uparrow x_0$, so existiert auch $f(x_{0-})$.
Bei monotonen Funktionen, für die $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $(a < x_0 < b)$, ist er $= f(x_0)$.

3.1.10 Cauchykriterium

Es sei $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - x_0| < \delta$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert) wie Folgen.

„$\Leftarrow$" Sei (x_n) Folge in $I \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$.
$(f(x_n))$ ist eine Cauchyfolge, weil zu $\varepsilon > 0$ aus der Voraussetzung ein $\delta > 0$ existiert.
Da $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ gibt es ein n_0 mit $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq n_0$.
Für $n > m \geq n_0$ gilt: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
Damit ist $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.
Jetzt das Folgenkriterium anwenden $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert.

3.2 Stetigkeit

Sei I stets ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$.

3.2.1 Definition

f heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in I$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.
f heißt *stetig* (in I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist. Kurz: $f \in C(I)$ oder $f \in C^0(I)$.
Bemerkung: f ist stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3.2.2 Rechenregeln

Sind f, g stetig (in x_0 oder in I), so sind auch folgende Funktionen stetig:

(a) $f + g$.

(b) λf für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $f \cdot g$.

(d) $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$ (in x_0 oder für $x \in I$)). Genauer: $g(x_0) \neq 0$.
$\Rightarrow$ es ex. ein $\sigma > 0$ mit $g(x) \neq 0$ in $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \cap I = I'$ und $\frac{f}{g}$ als Funktion von I' nach $\mathbb{R}$ ist stetig in x_0.

(e) Das Kompositum:
Ist $g\colon I \to J$ stetig (in $x_0 \in I$ oder in ganz I) und ist $f\colon J \to \mathbb{R}$ stetig (in $y_0 = g(x_0)$ oder im ganzen Intervall J), dann ist auch die Komposition $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ stetig (in x_0 oder in I).

Beweis: Nur für das Kompositum:
Sei $\varepsilon > 0$: Dann ex. ein $\delta > 0$ mit $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$ für $y \in J$, $|y - y_0| < \delta$.
Zu diesem δ existiert ein $\sigma > 0$ mit $|g(x) - g(x_0)| < \delta$ für alle $x \in I$, $|x - x_0| < \sigma$, d. h. für $x \in I$, $|x - x_0| < \sigma$ gilt: $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)| < \varepsilon$.

3.2.3 Beispiele

(1) Polynome sind stetig in $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = \sqrt[p]{x}$ ist stetig in $[0, \infty)$ $(p \in \mathbb{N})$.

(3) $f(x) = x^r$ ist stetig in $(0, \infty)$ für beliebige $r \in \mathbf{Q}$.

Beweis:

(1) Klar.

(2) Sei $x_0 \in [0, \infty)$, (x_n) Folge in $[0, \infty)$ mit $x_n \to x_0$.
$f(x_n) = \sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$ (Beispiel bei Folgen).
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ ist stetig.

(3) Sei $r = \frac{p}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$.
$g(x) = x^p$ ist stetig in $(0, \infty)$, falls $p \in \mathbb{N}$ ist; g ist auch stetig für $p \leq 0$ ($x^p = \frac{1}{x^{-p}}$).
Setze $c^r = \sqrt[q]{x^p} = h(g(x))$, $h(y) = \sqrt[q]{y}$ ist stetig nach Beispiel (2).
$\Rightarrow f(x)$ ist stetig.

3.2.4 Satz vom Minimum und Maximum

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so hat f Minimum und Maximum, d. h. es gibt $x_* \in [a, b]$ und $x^* \in [a, b]$ mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Für das Maximum:
Setze $M = \sup\{f(x)\colon a \leq x \leq b\}$. Dazu existiert eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $f(x_n) \to M$ für $n \to \infty$.
Da die Folge (x_n) beschränkt ist, enthält sie eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x^* \in [a, b]$.
Es ist dann $f(x^*) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M =$ Maximum.
Für das Minimum analog.

3.2.5 Nullstellensatz

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ $[f(a) > 0 > f(b)]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$. (ξ ist *Nullstelle* von f.)

Beweis: Zeige: Es gibt eine kleinste (erste) und eine größte (letzte) Nullstelle in (a, b).
Beweis (für $f(a) < 0 < f(b)$, kleinste Nullstelle):
Setze $M = \{x\colon f(t) < 0$ für $a \leq t < x\} \subseteq [a, b]$ und $\xi = \sup M \in [a, b]$. Es gilt:

(i) $M \neq \emptyset$, weil $a \in M$.

(ii) $\xi > a$, da $f(a) < 0$ und damit $f(t) < 0$ in $[a, a + \delta)$, für ein $\delta > 0$.

(iii) $\xi < b$, da $f(b) > 0$ und damit $f(t) > 0$ in $(b - \delta, b]$, für ein $\delta > 0$.

(iv) $a < x < \xi \Rightarrow f(t) < 0$ für $a \leq t < x$, d. h. $f(x) < 0$ in $[a, \xi)$.

(v) Nach Definition von ξ gibt es eine Folge (x_n) in $(\xi, b]$ mit $x_n \to \xi$ und $f(x_n) \geq 0$.
Es ist $f(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi_-} f(x) \leq 0$ und $f(\xi) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \geq 0$.
$\Rightarrow f(\xi) = 0$, $f(x) < 0$ für $a \leq x < \xi$. $\Rightarrow \xi$ ist kleinste Nullstelle.

3.2.6 Zwischenwertsatz

Ist f im Intervall I stetig, so ist $J = f(I)$ ein Intervall, insbesondere gilt: Ist $f(x_1) < y < f(x_2)$, so gibt es ein $x \in (x_1, x_2)$ (falls $x_1 < x_2$), bzw. $x \in (x_2, x_1)$ (falls $x_1 > x_2$) mit $f(x) = y$, $y \in J$.

Beweis: Setze $m = \inf\{f(x) \colon x \in I\}$ und $M = \sup\{f(x) \colon x \in I\}$.
Zeige: $(m, M) \overset{\otimes}{\subseteq} f(I) = J$. Dann ist $J = (m, M)$, $(m, M]$, $[m, M)$ oder $[m, M]$.
Beweis von $\otimes$: Sei $y \in (m, M)$. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) < y < f(x_2)$.
Dabei ist z. B. $x_1 < x_2$ (oder $x_1 > x_2$).
$f \colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ ist stetig, $g(x) = f(x) - y$ ist ebenfalls stetig.

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1) = f(x_1) - y < 0 \\ g(x_2) = f(x_2) - y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{es existiert ein } \xi \in (x_1, x_2) \text{ mit } g(\xi) = 0, \text{ d. h. } f(\xi) = y.$$

Falls $m = M$ ist $\Longrightarrow f$ ist konstant, $(m, M) = \emptyset \subseteq f(I) = \{m\} =: [m, m]$.

3.2.7 Bemerkung:

Ist $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f([a, b]) = [m, M]$ mit

$$\left.\begin{array}{c} M \\ M \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \min \\ \max \end{array}\right\} \{f(x) \colon a \le x \le b\}$$

3.2.8 Beispiele

(a) Sei $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$ in $I = (-1, 1)$. Es ist $f(I) = [0, \infty)$.

(b) Sei $f(x) = x + \frac{1}{x}$ in $I = (0, \infty)$. Es ist $f(I) = [2, \infty)$.

(c) Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2d+1} x^{2d+1}$ mit $a_{2d+1} > 0$ ein Polynom vom ungeraden Grad $2d + 1$. Es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ insbesondere hat f eine Nullstelle.

Beweis

(a) Es ist $f(x) \ge 0$, $f(0) = 0$ und $\sup\{f(x) \colon -1 < x < 1\} = +\infty$ (Es ist $f \nearrow$ in $[0, 1)$.

(b) Es ist $f(x) - 2 = x - 2 + \frac{1}{x} = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \ge 0$ für alle x und $= 0$ für $x = 1$.
Für $x \to 0$ gilt: $f(x) \to +\infty$: $\sup\{f(x) \colon 0 < x < \infty\} = +\infty$

(c) Setze $M = \sup\{f(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ und $m = \inf\{f(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{2d+1}} = \lim_{x\to\infty} \Big(a_{2d+1} + \underbrace{\frac{a_{2d}}{x}}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\frac{a_0}{x^{2d+1}}}_{\to 0}\Big) = a_{2d+1} > 0,$$

d. h. es existiert ein $K > 0$ mit $f(x) > \frac{1}{2} a_{2d+1} x^{2d+1}$ für $x > K \Rightarrow M = 0$.
Gleicher Beweis für $m = -\infty$.

3.2.9 Satz über die Umkehrfunktion

Ist f im Intervall I streng monoton und stetig, so existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} \colon J = f(I) \to I$ und sie ist stetig und streng monoton im gleichen Sinn wie f.

Beweis (Für den Fall, daß f wachsend ist):
Aus $x_1 < x_2$ folgt, daß $f(x_1) < f(x_2)$, d. h. daß f injektiv ist.
f^{-1} ist definiert auf dem Intervall $J = f(I)$.
Zeige nun die Stetigkeit von f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$:
Sei (y_n) Folge in J mit $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$.
Es ist $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$, $x_n, x_0 \in I$.
Zeige: $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$.
Wenn nun $x_n \not\to x_0$ (nicht konvergent gegen x_0), dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit z. B. $x_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon$ für alle k und für ein $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow f(x_{n_k}) \geq f(x_0 + \varepsilon)$
$\Rightarrow f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \geq f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0)$ Widerspruch!
Also gilt $f^{-1}(y_n) = x_n \longrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Bemerkung: Für $I = [a, b]$ gilt:
Man kann man eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0' \in [a, b]$ auswählen.
Dann ist $f(x_0') = \lim\limits_{x\to\infty} f(x_{n_k}) = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f$ ist injektiv und $x_0' = x_0$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß f^{-1} streng wachsend ist:
$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2) \overset{f \text{ streng wachsend}}{\Longrightarrow} x_1 < x_2$, also $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

3.2.10 Definition: gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *für alle* $x, y \in I$, $|x - y| < \delta$.

3.2.11 Bemerkungen und Beispiele

(a) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig in I.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist in $I = (0, 1]$ stetig, aber nicht gleichmäßig.
Beweis: $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n - (n+1)| = 1$
$x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$: $|x - y| = \frac{1}{n(n+1)}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Suche hierzu ein $\delta =?$ Dieses ex. nicht.

(c) **Lipschitz-stetige Funktionen**
$f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in I$ ($L > 0$ Lipschitzkonstante).
L-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig mit $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ für $\varepsilon > 0$.

(d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ist Lipschitzstetig in $I = [0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right)\right| \\
&= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \\
&= |x - y| \frac{x + y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \\
&\leq |x - y| \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot |x-y|$$

(e) $f(x) = \sqrt{x}$ ist in $I = [0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht L-stetig.
Beweis: Es ist $f(x) - f(y) = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Für z. B. $x > y$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}_{\leq 1} \cdot \sqrt{x-y} \\ &\leq \sqrt{|x-y|} \end{aligned}$$

Setze nun für $\varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon$. Also ist f gleichmäßig stetig. (nicht L-stetig als Aufgabe).

3.2.12 Satz von Heine

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Nehme an, daß die Behauptung falsch ist, d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem δ gibt es $x, y \in I$, so daß $|x-y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Zu $\delta = \frac{1}{n}$ existieren $x_n, y_n \in I$, so daß $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Die Folge (x_n) in $[a,b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), wobei $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, $y_{n_k} \to x_0$.
Mit der Stetigkeit von f in x_0 gilt dann:

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \text{ Widerspruch!}$$

Aufgabe: $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn es eine stetige Funktion F gibt mit $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $F(x) = f(x)$ in (a,b).

3.3 Gleichmäßige Konvergenz

Sei I ein Intervall, und $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.3.1 Def.: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert

(a) *punktweise* gegen $f\colon I \to \mathbb{R}$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

(b) *gleichmäßig* gegen $f\colon I \to \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ *und* alle $x \in I$.

Ebenso heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punktweise oder gleichmäßig konvergent, wenn die Funktionenfolge (s_n), $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$, punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

3.3.2 Beispiele

(1) Sei $f_n(x) = x^n$ in $I = [0,1]$. Es ist

$$f_n(x) \to \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ für } x = 1 \end{array} \right\} = f(x),$$

d. h. f_n ist punktweise konvergent. f_n ist aber *nicht* gleichmäßig konvergent.

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{x=1-\frac{1}{n}}{=} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $[-r, r]$, $0 < r < 1$, aber nicht gleichmäßig in $(-1, 1)$.
Beweis: Sei $|x| \leq r$: Dann gilt für $n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| - \left|\frac{1}{1-x}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k - \frac{r^{n+1}}{1-r} < \varepsilon,$$

da $0 < r < 1$. $\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz.
Nun für $(-1, 1)$: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} x^k &\overset{x=1-\frac{1}{n+1}}{=} 1 - \frac{x^n+1}{1-x} \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\ &= \underbrace{(n+1)}_{\to\infty} \cdot \left(\underbrace{1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to 1-\frac{1}{e}}\right) \to \infty \end{aligned}$$

3.3.3 Satz

Gegeben seien $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ und es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig in I.
Für $n = 1, 2, \ldots$ existiere $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$. Dann existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, d. h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right)$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein n_0 mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in I. \tag{3.1}$$

Weiter existiert ein $\delta_n > 0$ mit

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta_n \text{ und } x \in I. \tag{3.2}$$

Für $n > m > n_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |(a_n - f_n(x)) + (f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - a_m)| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon}_{\text{für } |x-x_0|<\delta_n} + \underbrace{\varepsilon}_{n\geq n_0} + \underbrace{\varepsilon}_{m\geq n_0} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{für } |x-x_0|<\delta_m} = 4\varepsilon\end{aligned}$$

Solche $x \in I$ existieren $\Rightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge, $a_n \to a$ für $n \to \infty$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_1 \tag{3.3}$$

Sei $m \geq n_0$ und $m \geq n_1$ fest. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|f(x) - a| &= |(f(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - a_m) + (a_m - a)| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon}_{\substack{m\geq n_0\\ \Rightarrow(3.1)}} + \underbrace{\varepsilon}_{\substack{0<|x-x_0|\leq\delta_n\\ \Rightarrow(3.2)}} + \underbrace{\varepsilon}_{\substack{m\geq n_1\\ \Rightarrow(3.3)}} = 3\varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $|f(x) - a| < 3\varepsilon$ für $0 < |x - x_0| < \delta_n =: \delta$, d. h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

3.3.4 Satz

Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig in I und sind alle f_n stetig (in x_0 oder in I), so ist auch f stetig (in x_0 oder in I).

Beweis: Sei $x_0 \in I$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}_{=f_n(x_0)} = f(x_0),$$

d. h. f ist stetig in x_0.

3.3.5 Cauchykriterium

Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n > m \geq n_0 \text{ und alle } x \in I. \tag{3.4}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ (gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ (3.4)) wie immer.

„$\Leftarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$ und (3.4) gelte für festes $x \in I$. Dann ist $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge, d. h. $f_n \to f$ punktweise.
Aus (3.4) folgt für $n \to \infty$, daß $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für $m \geq n_0$ und *alle* $x \in I$, d. h. $f_m \to f$ gleichmäßig.

Bemerkung: Für gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ lautet (3.4) so:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon \text{ für alle } n > m \geq n_0 \text{ } \textit{und alle } x \in I.$$

3.3.6 Majorantenkriterium

Gilt $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ und konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ *gleichmäßig* in I, dann auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
Speziell dann, wenn $|f_n(x)| \leq c_n$ für $x \in I$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dazu ex. ein n_0 mit $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) < \varepsilon$ für $n > m \geq I_0$ und $x \in I$.

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} g_k(x) < \varepsilon$$

für $n > m \geq n_0$ und $x \in I$.

3.3.7 Beispiele

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist gleichmäßig konvergent, weil $\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Majorantenkriterium).

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k(1-x)$ konvergiert punktweise in $[0,1]$, aber nicht gleichmäßig.
Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x) &= (1-x) \cdot \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ n+1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \\ &= 1 - x^{n+1} \\ &\to \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

ist unstetig, also kann keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen.

(3) $\sum\limits_{n=0} x^k(1-x)^2$ konvergiert gleichmäßig in $[0,1]$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$s_n(x) \overset{x \neq 1}{=} (1-x)^2 \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = (1-x)(1-x^{n+1}) \text{ für } 0 \leq x \leq 1.$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n} x^k(1-x)^2\right| &= |s_n(x) - s_m(x)| \\ &= |(1-x)(x^{m+1} - x^{n+1})|\end{aligned}$$

(i) Für $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$ ist dies $\leq 1(1-\varepsilon)^{m+1} < \varepsilon$ mit $m \geq n_0$.

(ii) Für $1-\varepsilon < x \leq 1$ ist dies $\leq \varepsilon \cdot 1$ für alle m.

$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ ist nicht gleichmäßig konvergent in $\mathbb{R}$.
Beweis: Sei $x > 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{x}{n^2+x^2} \geq \frac{xm}{4m^2+x^2} \overset{x=2m}{=} \frac{2m^2}{8m^2} = \frac{1}{4} > 0$$

Aus dem Cauchykriterium folgt dann, daß keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4+x^2}$ ist gleichmäßig konvergent.
Beweis: Mit dem Majorantenkriterium. Es ist

$$\left|\frac{x}{n^4+x^2}\right| \leq \begin{cases} \frac{n^2}{n^4}|x| \leq \frac{1}{n^2} & \text{für } |x| \leq n^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{für } |x| > n^2 \end{cases} = \frac{1}{n^2}$$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{2+r}+x^2}$ ist gleichmäßig konvergent für $r > 0$.
Beweis:

$$\left|\frac{x}{n^{2+r}+x^2}\right| \leq \begin{cases} \frac{n^{1+(r/2)}}{n^{2+r}} & \text{für } |x| \leq n^{1+(r/2)} \\ \frac{1}{n^{1+(r/2)}} & \text{für } |x| \geq n^{1+(r/2)} \end{cases} = \frac{1}{n^{1+(r/2)}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$. Hier ist $\alpha = 1 + \frac{r}{2}$.

3.4 Potenzreihen

3.4.1 Definition: Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{3.5}$$

heißt *Potenzreihe*. Die Folge (a_n) heißt *Koeffizientenfolge*, und x_0 ist der *Entwicklungspunkt*.

3.4.2 Satz, Konvergenzradius

Die Potenzreihe (3.5) konvergiert absolut in $(x_0 - r, x_0 + r)$ und gleichmäßig in jedem Intervall $[x_0 - \varrho, x_0 + \varrho] \subseteq (x_0 - r, x_0 + r)$. Sie divergiert für $x > x_0 + r$ und für $x < x_0 - r$. Dabei ist

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

der *Konvergenzradius* (Formel von Cauchy-Hadamard).

Sonderfälle:

1. Für $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ ist $r = 0$ und (3.5) heißt nirgends konvergent (obwohl konvergent in $x = x_0$).
2. Für $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ist $r = \infty$ und (3.5) konvergiert überall.

Beweis: Es ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Daraus folgt absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium für $|x-x_0| < r$.
Sei nun (3.5) konvergent im Punkt x. Dann gilt $a_n(x-x_0)^n \to 0$ für $n \to \infty$, insbesondere ist $|a_n(x-x_0)| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Damit gilt dann: $|x-x_0| \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M} = 1$.
Daraus folgt $|x-x_0| \leq r$ und damit Divergenz für $|x-x_0| > r$.
Zeige nun noch die gleichmäßige Konvergenz in $[x_0-\varrho, x_0+\varrho] \subseteq (x_0-r, x_0+r)$:
Wähle $\xi = x_0 + \frac{\varrho+r}{2}$ (falls $r > 0$, $r < \infty$).
Dann ist $|a_n(\xi-x_0)^n| = |a_n| \cdot \left(\frac{\varrho+r}{2}\right)^n \leq M$ beschränkt und für $|x-x_0| \leq \varrho$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_n(x-x_0)^n| &\leq |a_n| \cdot \varrho^n \cdot \left(\frac{\varrho+r}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{\varrho+r}\right)^n \\ &\leq M \cdot \underbrace{\left(\frac{2\varrho}{\varrho+r}\right)}_{=:q<1}{}^n \end{aligned}$$

$M \cdot q$ ist eine Majorante.

3.4.3 Satz

Hat (3.5) eine positiven Konvergenzradius, so stellt (3.5) eine im Konvergenzintervall stetige Funktion f dar.

Beweis: Sei $I_\varrho = [x_0-\varrho, x_0+\varrho] \subseteq (x_0-r, x_0+r)$. In I_ϱ liegt gleichmäßige Konvergenz vor. Damit ist f stetig in I_ϱ für $0 < \varrho < r$. Also ist f stetig in $\bigcup\limits_{0<\varrho<r} I_\varrho = (x_0-r, x_0+r)$.

3.4.4 Bemerkungen und Beispiele

(a) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$, so ist $r = \frac{1}{A}$ (**Quotientenkriterium**, Aufgabe)

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n$ hat für $\alpha \in \mathbf{Q}$ den Konvergenzradius $r = 1$, denn $\sqrt[n]{n^\alpha} \to 1 = \frac{1}{r}$.

(d) Die Binomische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Beweis über das Quotientenkriterium (a).

(e) Sei (a_n) die Fibonaccifolge mit $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$.
Frage: Was ist dann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

und welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe?
Behauptung: $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Versuche zu zeigen: $a_n \leq \varrho^n$ mit einem $\varrho \geq 1$ (a_n ist immer ≥ 1).
Dies ist o. k. für $n = 0$ und $n = 1$.
Induktionsansatz:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leq \varrho^n + \varrho^{n-1} = \varrho^{n-1}(\varrho + 1) \overset{?}{\leq} \varrho^{n+1}$$

Das „?“ ist in Ordnung, wenn $\varrho + 1 \leq \varrho^2$ ist. Suche nun das beste ϱ für $\varrho \geq 1$:

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \varrho + 1 \\ \varrho &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Da $\sqrt[n]{a_n} \leq \varrho$ ist, gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq \varrho \;\Rightarrow\; r \geq \frac{1}{\varrho} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Sei nun $|x| < r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\iff a_{n+1}x^{n+1} = x a_n x^n + x^2 a_{n-1} x^{n-1} \\ &\iff \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}}_{f(x)-a_0-a_1} = x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n}_{f(x)-a_0} + x^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{f(x)} \\ &\iff (f(x) - a_0 - a_1) = x(f(x) - a_0) + x^2 f(x) \\ &\iff f(x)(1 - x - x^2) = (a_0 + a_1 - a_0)x = 1 \\ &\iff f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

Wann ist $x^2 + x - 1 = 0$? Für $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$!
Also ist $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.4.5 Satz: Summe und Produkt von Potenzreihen

Haben $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ die Konvergenzradien $r_f > 0$ und $r_g > 0$, so gilt:

(a) $f(x) + g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r \geq \min\{r_f, r_g\}$.

(b) $f(x) \cdot g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$
und Konvergenzradius $r \geq \min\{r_f, r_g\}$.

Beweis:

(a) Summe konvergenter Reihen.

(b) Cauchyprodukt:
$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k b_{n-k}(x-x_0)^{n-k},$$
falls $|x-x_0| < r_f$ und $|x-x_0| < r_g$.

Beispiel zu (b): Es ist $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$ und $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Frage: Was ist die Potenzreihe für $\frac{1}{(1-x)^p}$ $(p = 3,\ p \geq 3)$?

3.4.6 Identitätssatz

Haben $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ positiven Konvergenzradius, und es ist $f(x) = g(x)$ für $x = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$, aber $x_k \neq x_0$. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: Annahme: Nicht für alle n gelte $a_n = b_n$. Setze
$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)t^n && (h(x-x_0) = f(x) - g(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n && (c_n = a_n - b_n). \end{aligned}$$
Nach Annahme existiert ein kleinstes m mit $c_m \neq 0$. Es ist also
$$h(t) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n t^n = t^m(c_m + c_{m+1}t + c_{m+1}t^2 + \cdots) = t^m \cdot \tilde{h}(t)$$
und für $t_k = (x_k - x_0) \neq 0$, $t_k \to 0$ gilt:
$$h(t_k) = 0 = \underbrace{t_k^m}_{\neq 0} \cdot \tilde{h}(t_k),$$
also $\tilde{h}(t_k) = 0$. D.h. $\tilde{h}(0) = 0 = c_m \neq 0$ Widerspruch!

3.4.7 Beispiele

(a) Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$.
Ist nun $a_{2n} = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, dann ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$.
Gilt umgekehrt $f(-x) = -f(x)$ in einem Intervall $(-\delta, \delta) \subseteq$Konvergenzintervall, dann ist $a_{2n} = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$
Beweis: $f(x) + f(-x) = 0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n - (-1)^n a_n)x^n$.
Aus dem Identitätssatz folgt, daß $a_n = (1 + (-1)^n) = 0$ für alle n, insbesondere ist $a_{2k} = 0$.

(b) Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$.
Dann ist f gerade ($f(-x) = f(x)$ in $(-\delta, \delta)$) genau dann, wenn $a_{2n-1} = 0$ ist für $n = 1, 2, \ldots$.
Beweis: $f(x) - f(-x) = 0 \ldots$ usw.

3.4.8 Satz über die Verknüpfung von Potenzreihen

$f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ habe Konvergenzradius $R > 0$
$g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ($g(0) = 0$ Entwicklungsmittelpunkt für f-Reihe)
Dann hat $f(g(x))$ eine Potenzreihenentwicklung $f(g(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
mit Konvergenzradius $r \geq \varrho$, ϱ so, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1| \varrho^n < R$ ist.

ohne Beweis

3.4.9 Beispiel

Sei $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
Suche die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ von $f(g(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Es ist

$$\begin{aligned}
f(g(x)) =& 1 + \frac{1}{1!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots\right)^2 \\
&+ \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots\right)^3 + \frac{1}{4!}(x \mp \cdots)^4 + \frac{1}{5!}(x \mp \cdots)^5 + \cdots \\
=& 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) \\
&+ \frac{1}{6}\left(x^3 - 3\frac{x^5}{6}\right) + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots \\
=& 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 \\
&+ \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + \cdots \\
=& 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

3.4.10 Satz über das Reziproke einer Potenzreihe

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$, $a_0 \neq 0$ ($\Rightarrow f(0) \neq 0$). Dann ist $\frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Beweis: Definiere (c_n) durch (3.6). Dann hat $\Phi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ positiven Konvergenzradius. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \Phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(c_n x^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right)}_{\substack{0 \text{ für } n \geq 1 \\ 1 \text{ für } n=0}} \cdot x^n = 1, \end{aligned}$$

d.h. $\Phi(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Konvergenzbeweis für $a_0 = 1$ $\left(\text{sonst: } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0\left(\frac{f(x)}{a_0}\right)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_0}\right)x^n}\right)$.
Es gibt ein $A \geq 1$ mit $|a_n| \leq A^n$ ($\Longleftrightarrow$Konvergenzradius $r > 0$)
Zeige: $|c_n| \leq (2A)^n$, d.h. Konvergenzradius $\geq \frac{1}{2A}$.
Induktionsanfang: $|c_0| = 1 \leq (2A)^0$. ✓
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} |c_n| = \left|-\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} c_k\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\underbrace{a_{n-k}}_{\leq A^{n-k}}| \cdot |\underbrace{c_k}_{\leq (2A)^k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k A^n = A^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = A^n \cdot (2^n - 1) < (2A)^n \end{aligned}$$

Induktionsbeweis ✓

3.4.11 Beispiel

Sei $f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 - x^5 + \cdots$ und $\frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Suche c_0, c_1, c_2, c_3.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_0c_0 &= 1 & &\Rightarrow c_0 = 1 \\ a_1 &= 0 & a_0c_1 + a_1c_0 &= 0 & &\Rightarrow c_1 = 0 \\ a_2 &= -3 & a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0 &= 0 & &\Rightarrow c_2 = 3 \\ a_3 &= 1 & a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0 &= 0 & &\Rightarrow c_3 = -1 \end{aligned}$$

2. Methode: Für $|t| < 1$ ist

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 3x^2 + x^3 - x^5 + \cdots} =& \frac{1}{1 - (3x^2 - x^3 + x^5 \mp \cdots)} \\ =& 1 + (2x^2 - x^3 + x^5 + \cdots) \\ &\quad + (3x^2 - x^3 + x^5 + \cdots)^2 + \cdots \\ =& 1 + 3x^2 - x^3 + 9x^4 + \cdots \end{aligned}$$

3.4.12 Umentwickeln von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $I = (x_0 - r, x_0 + r)$. Für $x_1 \in I$ gilt $x - x_0 = x - x_1 + x_1 - x_0$ und es ist nach dem binomischen Satz

$$(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-x_1)^k (x_1-x_0)^{n-k}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n (x_1-x_0)^{n-k} (x-x_1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_1)^k \end{aligned}$$

Was ist nun b_k? Wir sind in $|x-x_1| < r - |x_1-x_0|$ auf der sicheren Seite:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n (x_1-x_0)^{n-k} (x-x_1)^k \\ =&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1-x_0)^{n-k} (x-x_1)^k \\ =&\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1-x_0)^{n-k} \right] \cdot (x-x_1)^k \\ \Rightarrow b_k =&\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1-x_0)^{n-k} \end{aligned}$$

3.4.13 Beispiel

Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ in $(-1,1)$. Umentwicklung von $x_0 = 0$ auf $x_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(x + \frac{1}{2}\right)^k$$

mit $b_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =?$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}_{=b_k} \left(x+\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Daraus folgt ein Konvergenzradius $r = \frac{3}{2}$.

3.4.14 Abelscher Grenzwertsatz

Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig in $[0,1]$ und es gilt dabei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

Beweis: Sei $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Für $n > m$ und $0 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k &= \sum_{k=m+1}^{n} r_k x^k - \sum_{k=m+1}^{n} r_{k+1} x^k = \sum_{k=m+1}^{n} r_k x^k - \sum_{j=m+2}^{n+1} r_j x^{j-1} \\ &= r_{m+1} x^{m+1} - \sum_{k=m+2}^{n} r_k (x^k - x^{k-1})\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0 mit $|r_k| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$. Für $0 \leq x \leq 1$ und $n > m \geq n_0$ gilt also:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k\right| &= \left|r_{m+1} x^{m+1} - \sum_{k=m+2}^{n} r_k (x^k - x^{k-1})\right| \\ &\leq \varepsilon \cdot 1 + \sum_{k=m+2}^{n} \varepsilon \cdot (x^{k-1} - x^k) + \varepsilon \cdot 1 \\ &= 2\varepsilon + \varepsilon(x^{m+1} - x^{m+2} + x^{m+2} - \cdots + x^{n-1} - x^n) \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

Also gleichmäßige Konvergenz nach Cauchykriterium.

3.5 Exponentialfunktion und Logarithmus

3.5.1 Definition der Exponentialfunktion $\exp(x)$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ ist die } \textit{Exponentialfunktion} \text{ oder } \textit{Exponentialreihe}$$

3.5.2 Satz: Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Exponentialfuntkion ist stetig, streng monoton wachsend, $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und es gilt die *Funktionalgleichung*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \tag{3.7}$$

Beweis: Die Exponentialfunktion ist stetig in $\mathbb{R}$ als eine überall konvergente Potenzreihe, (3.7) war Aufgabe 4a auf Blatt 6.
Monotonie: Sei $x < y = x + h$ mit $h > 0$:

$$\exp(y) = \exp(x) \cdot \exp(h) > \exp(x), \text{ falls } \exp(x) > 0$$

$$\exp(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \cdots > 1.$$

Setze nun in (3.7) $y = -x$. Dann gilt $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$. Also ist $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, insbesondere ist $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(0) = 1$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, daß $\exp(x) > 0$ ist.
Ist $c > 0$, so existieren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x_1) < c < \exp(x_2)$, denn $\exp(x) = 1 + x + \cdots > x \to \infty$ für $x \to \infty$. $\Rightarrow x_2$ existiert. Da aber auch $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \to 0$ für $x \to \infty$ existiert auch x_1. Wende nun den Zwischenwertsatz auf die Ungleichung $\exp(x_1) < c < \exp(x_2)$ an. Daraus folgt, daß ein $x \in (x_1, x_2)$ existiert mit $\exp(x) = c$.)

3.5.3 Definition des Logarithmus $\log x$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, der *Logarithmus*, existiert, ist stetig und ist streng monoton wachsend in $(0, \infty)$. Es gilt:

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \tag{3.8}$$

Beweis: Alles bis auf (3.8) folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion.
Seien nun $x = \exp(s)$ und $y = \exp(t)$. Dann gilt:

$$\log(x \cdot y) = \log(\exp(s)\exp(t)) = \log(\exp(s+t)) = s + t = \log(x) + \log(y)$$

3.5.4 Satz

(a) $1 + x < \exp(x)$ für alle $x \neq 0$.

(b) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ für $x > -1$ und $x \neq 0$.

(c) $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Beweis:

(a) Klar für $x > 0$ und für $x \leq -1$. Für $-1 \leq x < 0$ gilt:

$$\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 1 + x$$

(b) Es ist $\log(1+x) < \log(\exp(x)) = x$, da $1 + x < \exp(1+x)$. Außerdem ist $-\log(1+x) = \log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) < -\frac{x}{1+x}$. Daraus folgt, daß $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ für $x \neq 0$ und $\frac{x}{1+x} < 1$.
Wenn $x > -1$ und $x \neq 0$ ist, dann ist $1 + x > 0$ und $x < 1 + x$, also $\frac{x}{1+x} < 1$.

(c) Multipliziere die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ mit $\frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\Rightarrow 1 \leftarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1 \to 1$.
Für $x \to 0+$ gilt dann $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
Es ist $\log(e) = \lim\limits_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$.
Also ist $e = \exp(\log(e)) = \exp(1)$.

3.5.5 Bemerkung

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\exp(n) = e^n$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(-n) = e^{-n}$.

(c) Für $r = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ gilt $\exp(\frac{m}{n}) = e^{m/n}$, d.h. $\exp(r) = e^r$.

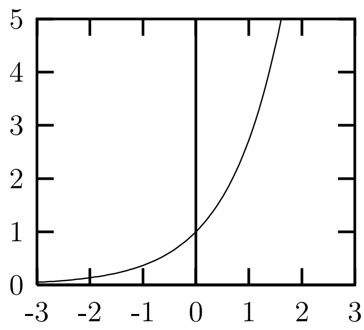
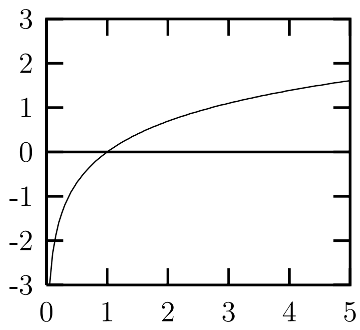
Beweis:

(a) Mit Induktion: $\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$.

(b) $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$.

(c) Sei $m = 1$. Dann ist $e = \exp(1) = \exp(n \cdot \frac{1}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^n$. Es ist $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{\exp(1)} = e^{1/n}$ und $\exp(\frac{m}{n}) = \exp(m \cdot \frac{1}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^m = (e^{1/n})^m = e^{m/n}$.

Abbildung 3.1: Vergleich der Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion e^x	Der Logarithmus $\log x$
ist stetig und streng wachsend auf $\mathbb{R}$	ist stetig und streng wachsend in $(0,\infty)$
$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
$e^x > x + 1$ für $x \neq 0$	$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ für $x > -1$, $x \neq 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$
$\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$	$\log(0,\infty) = \mathbb{R}$
	

3.5.6 Definition von e^x für $x \in \mathbb{R}$

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man $e^x := \exp(x)$ und für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $a^x := e^{x \cdot \log a}$.

Bemerkung: Für $r = \frac{p}{q}$ gilt:

$$e^{r \log a} = e^{\frac{p}{q} \log a} = \exp(\frac{1}{q} \log a^p) = (e^{\log a^p})^{1/q} = (a^p)^{1/q} = a^{p/q} = a^r$$

3.5.7 Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$\sinh x$ ist stetig, streng wachsend (e^x und $-e^{-x}$ streng wachsend), ungerade.
$\cosh x$ ist stetig, streng wachsend in $[0, \infty)$, streng fallend in $(-\infty, 0]$, gerade.
Tangens hyperbolicus:

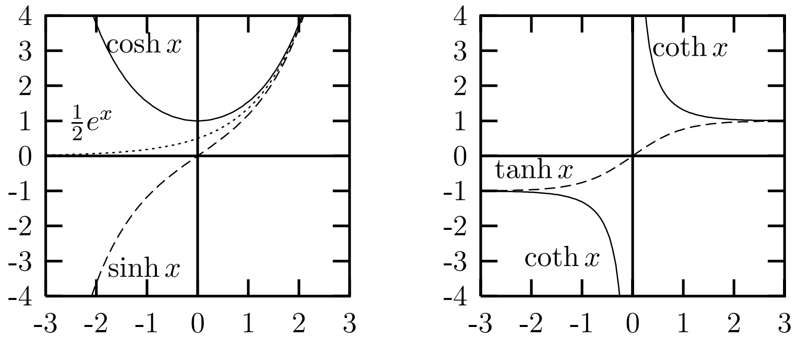
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Cotangens hyperbolicus:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Der tanh ist monoton: Es ist $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$
Damit ist $e^{2x} + 1 \nearrow$, $\frac{1}{e^{2x}+1}$ und damit $\frac{-2}{e^{2x}+1} \nearrow$.

Abbildung 3.2: Die hyperbolischen Funktionen



3.6 Die trigonometrischen Funktionen

3.6.1 Definitionen und Satz

Die Funktionen

Sinus: $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Cosinus: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

sind stetig in $\mathbb{R}$ und es gilt:

(i) $\sin(-x) = -\sin x$ (ungerade Funktion)

(ii) $\cos(-x) = \cos x$ (gerade Funktion)

(iii) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(iv) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

Beweis: nur noch für (iii) und (iv):

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \cos y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} \cdot y^{2n-2k} \left(\frac{(2n)!}{(2n)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \sum_{\substack{j \le 2n \\ j \text{ gerade}}} \binom{2n}{j} x^j y^{2n-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x \cdot \sin y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k} y^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} \cdot \left(\frac{(2n+2)!}{(2n+2)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+2)! \cdot x^{2k+1} \cdot y^{2n+2-(2k+1)}}{(2k+1)! \cdot (2n+2-2k-1)!}
\end{aligned}$$

setze $n+1 = m$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m}{(2m)!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^{2k+1} y^{2m-(2k+1)} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{\substack{j \le 2n \\ j \text{ ungerade}}} \binom{2n}{j} x^j y^{2n-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j y^{2n-j} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+y)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+y)^{2n} = \cos(x+y)
\end{aligned}$$

(iv) selber machen.

3.6.2 Hilfssatz

(a) $-\frac{x^2}{2} \le \cos(x) - 1 \le -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ für $|x| \le \sqrt{12}$

(b) $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ für $0 \le x \le \sqrt{6}$

Beweis: Mit Leibnizkriterium:

(a) Es ist $\cos(x) - 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. Das Leibnizkriterium ist anwendbar, falls $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ für alle n gilt,
d. h. falls $(2n+2)(2n+1) \geq x^2$ für alle n,
d. h. falls $(2+2)/2+1) \geq x^2$, also falls $|x| \leq \sqrt{12}$. Dann ist

$$-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) - 1 \leq \frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(b) Hier ist genauso das Leibnizkriterium anwendbar, falls

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &\leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{ für alle } n \geq 1 \\ \iff x^2 &\leq (2n+1)2n \text{ für alle } n \geq 1 \\ \iff x^2 &\leq 6, \text{ also falls } 0 \leq x \leq \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x \text{ für } 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

3.6.3 Die Zahl π

Der Cosinus besitzt eine kleinste positive Nullstelle: $\frac{\pi}{2}$. Es gilt:

$$1{,}4 \approx \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - \sqrt{12}} \approx 1{,}6$$

Beweis: Es ist

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Die Nullstellen von $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ sind $\pm\sqrt{6 - \sqrt{12}}$.
Es ist $\cos 0 = 1$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} > 0$ in $[0, \sqrt{2}]$ und es ist $\cos(\sqrt{6 - \sqrt{12}}) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat $\cos x$ eine kleinste positive Nullstelle $\frac{\pi}{2}$, die in $(\sqrt{2}, \sqrt{6 - \sqrt{12}})$ liegt.

3.6.4 Einfache Eigenschaften von Sinus und Cosinus

(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(b) $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$

(c) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$

(d) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Beweis:

(a) Setze $y = -x$ in (iii):

$$\cos 0 = 1 = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

(b) $\cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$ (oder -1) nach (a), aber $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} > -1$ für $x = \frac{\pi}{2}$.

(c) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$
$\sin(x + \pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\cos(x + \pi) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

(d) $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$. cos genauso.

(e) $\frac{\sin x}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 + \cdots \to 1$ für $x \to 0$.
$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} x^2 \mp \to -\frac{1}{2}$ für $x \to 0$.

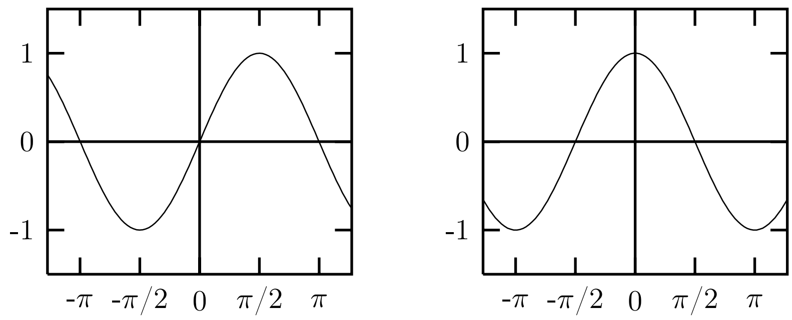


Abbildung 3.3: Sinus und Cosinus

4 Differentialrechnung[1]

4.1 Differenzierbare Funktionen

4.1.1 Definition

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I Intervall) un $x_0 \in I$.
f heißt *differenzierbar* in x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. $f'(x_0)$ ist die Ableitung (der Differentialquotient) in x_0, auch geschrieben als $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.
$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist der Differenzenquotient. Er stellt die Steigung der Geraden dar, die den Graphen von f an den Stellen x und x_0 schneidet.
f heißt differenzierbar, wenn $f'(x_0)$ in jedem $x_0 \in I$ existiert. Wenn f' sogar in I stetig ist, so heißt f *stetig differenzierbar*: $f \in C^1(I)$, d. h. f ist differenzierbar und $f' \in C^0(I)$.

4.1.2 Bemerkungen und Beispiele

(i) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so ist f auch stetig in x_0.

(ii) Sei $f(x) = c$ konstant. Dann ist $f'(x) = 0$.

(iii) Es ist $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$.

(iv) Es ist $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$.

(v) Es ist $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$.

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(ii) klar.

[1] Version 4.9 vom 18. Dezember 2002

(iii)

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow{h\to 0} e^h J$$

(iv) Hier nur für den Sinus:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin h}{h}\\ &\to \sin(x)\cdot\frac{-1}{2}\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1\\ &= \cos x \text{ für } h\to 0.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} &= \frac{\log(x(1+\frac{h}{x}))-\log(x)}{h}\\ &= \frac{\log(x)+\log(1+\frac{h}{x})-\log(x)}{h}\\ &= \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\\ &\left(\frac{\log(1+t)}{t}\to 1 \text{ für } t\to 0\right)\\ &\to \frac{1}{x} \text{ für } h\to 0\end{aligned}$$

4.1.3 Differentiationsregeln

Sind f und g differenzierbar in x_0 (oder in I) und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind die folgenden Funktionen ebenfalls differenzierbar:

(1) $f+g$. Dabei ist $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

(2) λf. Dabei ist $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

(3) $f\cdot g$. Dabei ist $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(4) $\frac{f}{g}$, falls $g(x_0)\neq 0$. Dabei ist $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
Insbesondere ist $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.

Beweis:

(3)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\ &\quad + \frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &\to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

(4) Beweise zuerst den Spezialfall $\frac{1}{g}$:
$g(x) \neq 0$, g stetig in x_0, also ist $g(x) \neq 0$ in einem Intervall $(x_o - \delta, x_0 + \delta)$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\to -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to \frac{1}{g^2(x_0)}}$$
$$\to \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Nun $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' - \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \overset{(3)}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$
$$= f' \cdot \frac{1}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

4.1.4 Umformung der Definition

Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$\iff \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0)}{h}}_{=:r(h)} = 0$$
$$\iff f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h) \text{ mit } r(h) \to 0 \text{ für } h \to 0$$

$f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$ ist Approximation von $f(x_0 + h)$ in der Nähe von $h = 0$.

4.1.5 Kettenregel

Seien $g \colon I \to J$ und $f \colon J \to \mathbb{R}$ mit Intervallen I und J. Ist g differenzierbar in $x_0 \in I$ und ist f differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$, dann ist $f \circ g$, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&(1) \quad g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h) \text{ mit } r(h) \to 0 \text{ für } h \to 0 \\
&(2) \quad f(y_0 + k) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot k + k \cdot \varrho(k) \text{ mit } \varrho \to 0 \text{ für } k \to 0
\end{aligned}$$

Damit ist

$$(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0) - h \cdot f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$
$$= \underbrace{f(g(x_0 + h)) - f(y_0)}_{\otimes} - h \cdot f'(y_0) g'(x_0) = (*)$$

Dabei ist

$$\otimes = f(g(x_0+h)) - f(y_0)$$

mit $k = g(x_0+h) - g(x_0)$

$$\begin{aligned}
&= f(y_0+k) - f(y_0) \\
&\overset{(2)}{=} f'(y_0)\cdot(g(x_0+h)-g(x_0)) + (g(x_0+h)-g(x_0))\cdot\varrho(k) \\
&\overset{(1)}{=} f'(y_0)\cdot(g'(x_0)\cdot h + h\cdot r(h)) + g'(x_0)\cdot h\varrho(k) \\
&= f'(y_0)g'(x_0)\cdot h + h\cdot(f'(y_0)\cdot r(h) + g'(x_0)\cdot\varrho(k))
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ gilt dann: $k = g(x_0+h) - g(x_0) \to 0$ und $\varrho(k) \to 0$. Daraus folgt dann für $(*)$:

$$(*) = f'(y_0)g'(x_0)\cdot h + h\cdot R(h),$$

wobei $R(h) = f'(y_0)\cdot r(h) + g'(x_0)\cdot\varrho(g(x_0+h)-g(x_0)) \to 0$ für $h \to 0$.
Also: $(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$.

4.1.6 Beispiele

(1)

$$\frac{d}{dx}e^{\cos x} = e^{\cos x}\cdot\sin x$$

(2) Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha\log x} = e^{\alpha\log x}\alpha\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

4.1.7 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv und differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}\colon J = f(I) \to I$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es ist

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Falscher Beweis: Mit Kettenregel. Es gilt: $f(f^{-1}(y)) = y$. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f(f^{-1}(y)) = f'(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y) \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Dieser „Beweis“ ist aber nur richtig, falls sicher ist, daß f^{-1} in y_0 differenzierbar ist.

Beweis: Es ist $y_0 = f(x_0)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Setze $y_0 + h = f(x_0 + k)$, also ist k definiert durch

$$k := f^{-1}(y_0 + h) - x_0 \neq 0.$$

Damit gilt dann:

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}}.$$

Für $h \to 0$ folgt $k \to 0$, da f^{-1} stetig ist, und damit ist

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.1.8 Beispiele

(1) Es ist

$$\frac{d}{dy}\log y = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}e^x}\right|_{x=\log y} = \left.\frac{1}{e^x}\right|_{x=\log y} = \frac{1}{y}$$

(2) Es ist

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}x^n}\right|_{x=\sqrt[n]{y}} = \left.\frac{1}{nx^{n-1}}\right|_{x=\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

4.1.9 Höhere Ableitungen

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall I. Wenn f differenzierbar ist, ist f' die Ableitung. Wenn f' differenzierbar ist, ist $(f')' = f''$ die 2. Ableitung von f und wenn f'' differenzierbar ist, dann ist $(f'')' = f'''$ die 3. Ableitung von f.
Allgemeiner: Es ist $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$. Induktiv wird weiter definiert: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. Dabei ist $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f. Es werden dann folgende Mengen definiert:

$$\begin{aligned}
C^0(I) &= \{f\colon f \text{ ist stetig in } I\}\\
C^1(I) &= \{f\colon f' \text{ ist stetig in } I\}\\
C^n(I) &= \{f\colon f^{(n)} \text{ ist stetig in } I\}\\
C^\infty(I) &= \bigcap_{n\geq 0} C^n(I) = \{f\colon f^{(n)} \text{ existiert für alle } n \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$C^0(I) \supseteq C^1(i) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(I)$$

4.1.10 Leibnizregel

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)} g^{(n-\nu)}$$

Beweis: mit Induktion: Für $n = 1$ ist dies die Produktregel. Für $n \mapsto n+1$: Aufgabe. Tip: Vergleiche mit dem Binomischen Lehrsatz, 1.5.6 auf Seite 13:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

4.2 Die Mittelwertsätze der Diff.-rechnung

4.2.1 Definition: Minimum, Maximum

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein Minimum bzw. Maximum, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$ für ein $\delta > 0$. Gilt $f(x) > f(x_0)$ bzw. $f(x) < f(x_0)$ für $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$, so heißt x_0 Stelle eines strikten Minimums bzw. Maximums.

4.2.2 Bemerkung

Ist x_0 kein Endpunkt von I und hat f in x_0 ein Extremum (Minimum oder Maximum) und existiert $f'(x_0)$, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Für den Fall eines Maximums. Es gilt $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ für kleine $|h|$. Daraus folgt:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{array}{l} \leq 0, \text{ für } h > 0 \\ \geq 0, \text{ für } h < 0 \end{array} \xrightarrow{h \to 0} f'(x_0) \begin{array}{l} \leq 0, \text{ für } h > 0 \\ \geq 0, \text{ für } h < 0 \end{array} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

4.2.3 Satz von Rolle

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$, und ist f differenzierbar in (a,b), so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Klar für konstantes f. Sonst hat f ein Extremum in $\xi \in (a,b)$. Dort ist $f'(\xi) = 0$.

4.2.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f \in C^0([a,b])$ differenzierbar in (a,b), so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi) \text{ bzw. } \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Beweis: Sei $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Es ist $g(a) = g(b) = f(a)$. Außerden ist $g \in C^0([a,b])$ und diffbar in (a,b). Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$ und damit

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

4.2.5 Beispiele

(1) **Behauptung:** $\sin x \leq x$ für $x \geq 0$.
Beweis:

$$\sin x = \sin x - \sin 0 \overset{\text{MWS}}{=} (x-0)\cdot\cos\xi \text{ mit } \xi \in (0,x) \leq x$$

(2) **Behauptung:** $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ für $x > -1$.
Beweis: Es ist

$$\log(1+x) = \log(1+x) - \log(1+0) = (x-0)\frac{1}{1+\xi} = \frac{x}{1+\xi}.$$

Für $x > 0$, $0 < \xi < x$ gilt:

$$\frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x} \longrightarrow \frac{x}{1+\xi} > \frac{x}{1+x}$$

Für $-1 < x < 0$, $x < \xi < 0$ gilt:

$$\frac{1}{1+\xi} < \frac{1}{1+x} \longrightarrow \frac{x}{1+\xi} > \frac{x}{1+x}$$

(3) Es ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ der Tangens. Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}\\ &= \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 > 1 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Behauptung: $\tan x > x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Beweis: $\tan x = \tan x - \tan 0 = (x-0)\cdot(\tan)'(\xi) > x$ mit $\xi \in (0,x)$.

4.2.6 Satz

Sind f und g stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) mit $f' = g'$ in (a,b), dann gilt $f = g + c$ mit einer Konstanten c.

Beweis: $h = f - g$ ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Es gilt $h' = f' - g' = 0$. Seien nun $x, y \in (a,b)$. Dann ist $h(y) - h(x) = (y-x)h'(\xi) = 0$, d. h. h ist konstant.

4.2.7 Satz

Sei f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) mit $f'(x) \to \ell$ für $x \to a$. Dann ist f differenzierbar in $[a,b)$ mit $f'(a) = \ell = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

Beweis: Sei $x \in (a,b)$. Dann gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (a,x).$$

Für $x \to a$ folgt $\xi \to a$, also $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \ell$.

4.2.8 Aufgabe

Zeige: Sei f stetig in (a, b) und differenzierbar in (a, c) und (c, b) mit $c \in (a, b)$. Existiert dann $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = \ell$, so ist $f'(c) = \ell$.

4.2.9 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sind f und g stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b), so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$$

beziehungsweise

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis: (Der Sonderfall $g(x) = x$ entspricht dem Mittelwertsatz)
Zuerst ein FALSCHER BEWEIS: Es gilt:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\xi_1)(b - a) \\ g(b) - g(a) &= g'(\xi_2)(b - a) \end{aligned}$$

Falls $g(b) - g(a) \neq 0$, dann kann dividiert werden:
$\Rightarrow$ verallgemeinerter Mittelwertsatz. FALSCH! Denn i. A. ist $\xi_1 \neq \xi_2$!
RICHTIGER BEWEIS: Sei $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.
h ist stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b). Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \\ h(b) &= -f(a)g(b) + f(b)g(a)) \\ \Rightarrow h(a) &= h(b) \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert nun ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit gilt:

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

4.2.10 Regel von de l'Hôspital

1. Form: Seien f und g stetig in $[a, b)$ und differenzierbar in (a, b).
Außerdem sei $f(a) = g(a) = 0$, sowie

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

existiere. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Sonderform: Seien f und g in (c, ∞) stetig und differenzierbar.
Außerdem sei $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ und

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Dann gilt
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

2. Form: Seien f und g differenzierbar in (a,b), $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ und
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Dann gilt:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Beweis:

1. Form:
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\&\overset{\text{Va. MWS}}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{ für ein }\xi\in(a,x).\end{aligned}$$

Sonderform: Sei $F(x)=f(\frac{1}{x})$, $G(x)=g(\frac{1}{x})$ in $(0,\frac{1}{c})$. Es ist $F(x)\to 0$ und $G(x)\to 0$ für $x\to 0$.
$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f'(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}}\to L$$

2. Form: Sei $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$:

Es existiert ein $c\in(a,b)$ mit $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$ für $a<x<c$.

Es existert ein d, $a<d<c$ mit $\left|\frac{f(c)}{f(x)}\right|<\varepsilon$ und $\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$ für $a<x<d$.

Sei nun $a<x<d$. Dann ist
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-L&=\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}}_{\text{va. MWS}}\cdot\frac{1-\frac{g(c)}{g(x)}}{1-\frac{f(c)}{f(x)}}-L\\&=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L+\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(H(x)-1)\end{aligned}$$
$$H(x)=\frac{1-\frac{g(c)}{g(x)}}{1-\frac{f(c)}{f(x)}},\text{ wobei }x<\xi<c$$
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|&<\varepsilon+\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{\left|\frac{f(c)}{f(x)}-\frac{g(c)}{g(x)}\right|}{\left|1-\frac{f(c)}{f(x)}\right|}\\&<\varepsilon+(|L|+\varepsilon)\cdot\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\\&<\varepsilon+\left(|L|+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2\varepsilon}{\frac{3}{4}}\\&=\text{const}\cdot\varepsilon\text{ für }a<x<d=a+\delta.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

4.2.11 Beispiele

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

direkt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

4.3 Anwendungen der Differentialrechnung

A Monotone Funktionen

$I = (a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$. $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a,b).

4.3.1 Satz

1. f monoton wachsend [fallend] $\iff$ $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ in $a < x < b$.
2. Ist $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ in (a,b), dann ist f streng wachsend [fallend].

Beweis:

(i) „$\Rightarrow$“ Sei x, $x+h$, $h > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad (f \uparrow)$$

„$\Leftarrow$“ Sei $x < y$ und $f' \geq 0$:

$$f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi) \geq 0 \text{ mit } \xi \in (x,y).$$

Also ist f wachsend.

(ii) $\Rightarrow f'(\xi) > 0$: $f(y) - f(x) > 0$, streng monoton.

4.3.2 Beispiel: $f(x) = x \cdot \log x$

Sei $f(x) = x \log x$ und $I = (0,\infty)$. Es ist

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1 \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{e} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Es gilt außerdem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

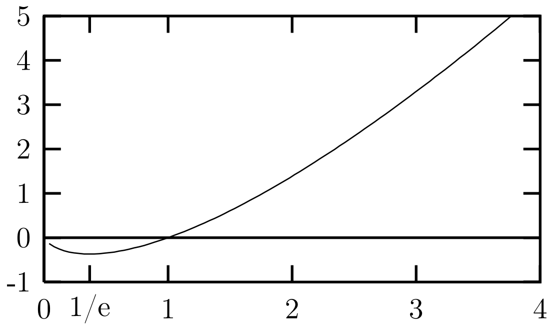


Abbildung 4.1: $f(x) = x \cdot \log x$

B Konvexe Funktionen

I und f wie vorher.

4.3.3 Definition: konvex

f heißt *konvex*, wenn für beliebige $x, y \in I$ und $0 < t < 1$ gilt:

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{4.1}$$

Interpretation: Sei $z = ty + (1-t)x$. Für $x < y$ gilt dann:

$$t(y-x) = z - x, \qquad t = \frac{z-x}{y-x}, \qquad 1 - t = \frac{y-z}{y-x}$$

Umgeformte Definition:

$$f(z) \leq \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y) + \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) = l(z) \text{ linear} \tag{4.2}$$

Bedeutung der 2. Definition: f ist konvex im Intervall (a, b), wenn für beliebige x, y mit $a < x < y < b$ gilt, daß der Graph von f unterhalb der Geraden liegt, die die Funktion zwischen den Stellen a und b verbindet.

4.3.4 Satz

f ist genau dann konvex, wenn für $x < z < y$ beliebig gilt:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{4.3}$$

Beweis: (4.2) $\Longleftrightarrow$ (4.3):

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \frac{z-x}{y-x} f(y) + \frac{y-z}{y-x} f(x) \\ \Longleftrightarrow \quad f(z)(t + (1-t)) &\leq \frac{z-x}{y-x} f(y) + \frac{y-z}{y-x} f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff f(z)\frac{z-x}{y-x}+f(z)\frac{y-z}{y-x}\leq\frac{z-x}{y-x}f(y)+\frac{y-z}{y-x}f(x)\\
&\iff f(z)(z-x)+f(z)(y-z)\leq f(y)(z-x)+f(x)(y-z)\\
&\iff f(z)(y-z)-f(x)(y-z)\leq f(y)(z-x)-f(z)(z-x)\\
&\iff \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}
\end{aligned}$$

4.3.5 Satz

(a) Ist f differenzierbar in (a,b), so ist f genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

(b) Ist f zweimal differenzierbar in (a,b), so ist f genau dann konvex, wenn $f''(x)\geq 0$ in (a,b) ist.

Beweis: Zuerst für (b): Aus (a) folgt (b), denn: Wenn f'' existiert gilt

$$f\uparrow\iff f''=(f')'\geq 0.$$

Jetzt der Beweis für (a):

„⇒“ f sei konvex und differenzierbar: Aus (4.3) folgt:

$$f'(x)\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\text{ für } z\to x$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq f'(y)\text{ für } z\to y$$

Daraus folgt:

$$f'(x)\leq f'(y)$$

„⇐“ f' sei monoton wachsend. Weise nun (4.3) nach:
Seien ξ und η beliebig mit $x<\xi<z<\eta<y$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(x)}{z-x}&\overset{\text{MWS}}{=}f'(\xi)\\
\frac{f(y)-f(z)}{y-z}&\overset{\text{MWS}}{=}f'(\eta)\geq f'(\xi)
\end{aligned}\right\}\Rightarrow (4.3)$$

C Die Arcusfunktionen

4.3.6 Arcustangens

Definition des Tangens: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Es ist $\tan\colon(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ und für die Ableitung gilt: $\frac{d}{dx}\tan x=1+(\tan x)^2\geq 1>0$. Also ist der Tangens streng wachsend. Zusätzlich gilt: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}=-\infty$.
Für die zweite Ableitung gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2}\tan x=2\cdot\tan x\cdot(1+(\tan x)^2)\begin{cases}>0 & \text{in } (0,\frac{\pi}{2})\\ <0 & \text{in } (-\frac{\pi}{2},0)\end{cases}$$

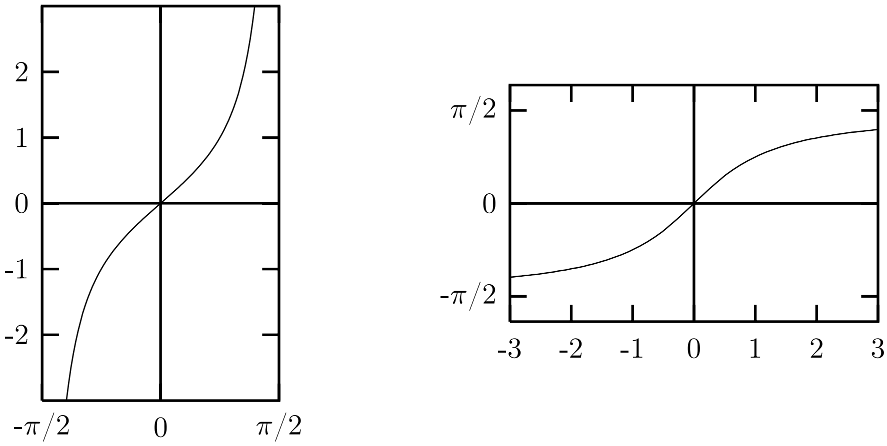


Abbildung 4.2: Tangens und Arcustangens

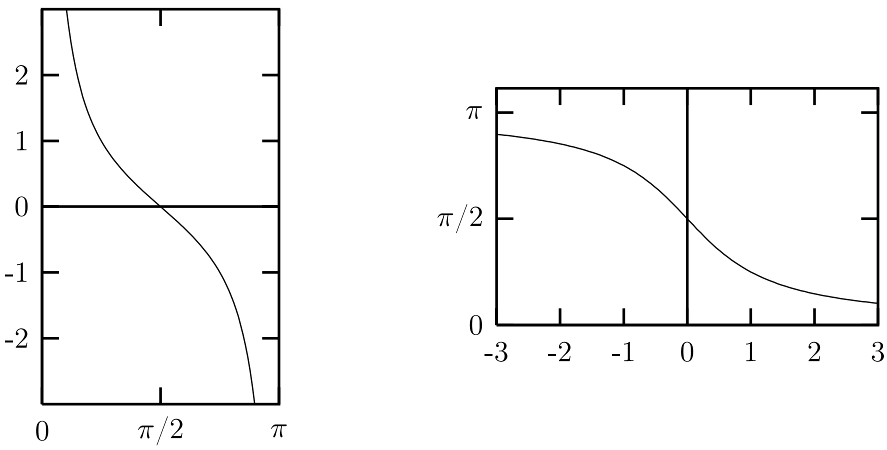


Abbildung 4.3: Cotangens und Arcuscotangens

Der Tangens besitzt eine Umkehrfunktion, den *Arcustangens*: $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Es gilt:

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \left. \frac{1}{1 + (\tan x)^2} \right|_{x = \arctan y} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \arctan y = \frac{-2y}{(1 + y^2)^2}$$

4.3.7 Arcuscotangens

Der Cotangens $\cot\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Es ist

$$\frac{d}{dx} \cot x = -1 - (\cot x)^2$$

Die Umkehrfunktion ist der Arcuscotangens: $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot} y = \frac{-1}{1 + y^2}$$

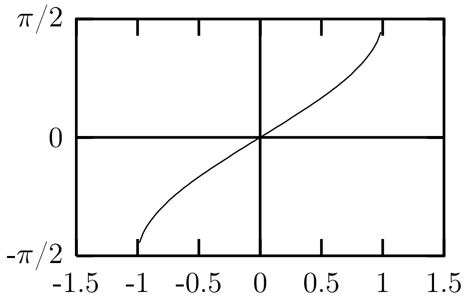


Abbildung 4.4: Arcussinus

4.3.8 Arcussinus

Für den Sinus gilt: $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ und

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x > 0$$

in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Der Sinus ist also streng wachsend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Die Umkehrfunktion des Sinus ist der Arcussinus $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi 2}{2}]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\arcsin y &= \left|\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y} \\
&= \left.\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)}}\right|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ in } (-1,1). \\
\frac{d^2}{dy^2}\arcsin y &= -\frac{1}{2}(1-y^2)^{-3/2}\cdot(-2y) = y(1-y^2)^{-3/2}
\end{aligned}$$

4.3.9 Arcuscosinus

Für den Cosinus gilt $\cos\colon [0,\pi] \to [1,1]$ und

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x < 0$$

Die Umkehrfunktion ist der Arcuscosinus $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\arccos y &= \left.\frac{1}{-\sin x}\right|_{x=\arccos y} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

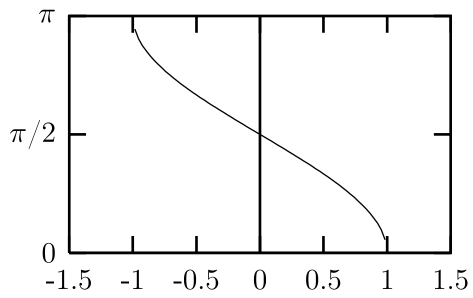


Abbildung 4.5: Arcuscosinus

D Differentiation und gleichmäßige Konvergenz

4.3.10 Beispiel

Sei $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ in $[-1,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\begin{aligned} x > 0\colon f_n'(x) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}} \\ x < 0\colon f_n'(x) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) (-x)^{\frac{1}{n}} (-1) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) |x|^{\frac{1}{n}} \\ f_n'(0) &= 0 \\ f_n'(x) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Betrachte $f_n(x)$ und $f_n'(x)$ für $n \to \infty$:

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{glm.}} |x| = f(x)$$

$f(x)$ ist nicht differenziervar in $x = 0$

$$f_n'(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} 1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sign}(x)$$

$f_n'(x)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $f'(x)$.

4.3.11 Satz

Sei $f_n \in C^1(I)$ im Intervall I, $f_n(x)$ konvergiere punktweise in I gegen $f(x)$ und $f_n'(x)$ konvergiere gleichmäßig in I gegen $g(x)$. Dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$. Oder

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Beweis: g ist stetig, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n'(x)$. Sei nun $x \in I$ und $\varepsilon > 0$:

1. Es existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$ für alle $\xi \in I$ mit $|\xi - x| < \delta$ (Stetigkeit von g).
2. Es gibt ein n_0 mit $|f_n'(\xi) - g(\xi)| < \varepsilon$ für alle $\xi \in I$ und alle $n \geq n_0$ (glm. Konvergenz $f_n' \to g$).

3. Es gibt ein n_1 mit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Gilt für h nun $0 < |h| < \delta$, so folgt:

$$|f(x) - f_n(x)| < |h| \cdot \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$

$$|f(x+h) - f_n(x+h) < |h| \cdot \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| &= \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x) + (f_n'(x) - g(x))\right. \\
&\quad \left. + \frac{f(x+h)-f_n(x+h)}{h} + \frac{f(x)-f_n(x)}{h}\right| \\
&\leq \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right| \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon}_{2.} + \underbrace{\varepsilon}_{3.} + \underbrace{\varepsilon}_{3.} \\
&\overset{\text{MWS}}{=} |f_n'(\xi_n) - f_n'(x)| + 3\varepsilon \\
&= |(f'(\xi_n) - g(\xi_n)) + (g(\xi_n) - g(x)) \\
&\quad + g(x) - f_n'(x)| + 3\varepsilon \\
&< \underbrace{\varepsilon}_{2.} + \underbrace{\varepsilon}_{1.} + \underbrace{\varepsilon}_{2.} + 3\varepsilon = 6\varepsilon
\end{aligned}$$

für $0 < |h| < \delta$, also ist $f'(x) = g(x)$.

4.3.12 Folgerungen

Folgerung 1: Seien $f_n \in C^1(I)$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiere punktweise in I und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ konvergiere gleichmäßig in I. Dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Folgerung 2: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n
\end{aligned}$$

Folgerung 3: Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $I = (x_0 - r, x_0 + r)$. Dann ist $f \in C^{\infty}(I)$ und für $m = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1) a_n (x-x_0)^{n-m}$$

Beweise:

Folgerung 1: Betrachte $x_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ und $s_n'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k'(x)$.

Folgerung 2: $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $f_n \in C^1(I)$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$.
Sei $0 < \varrho < r$, $J_\varrho = [x_0 - \varrho, x_0 + \varrho]$.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n$ hat Konvergenzradius $r > 0$, denn:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}} = \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ Gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n$ in J_ϱ.
$\Rightarrow f \in C^1(J_\varrho)$ und $f' = g$ in J_ϱ.
Da $I = \bigcup\limits_{0<\varrho<r} J_\varrho \implies f \in C^1(I)$ und $f' = g$ in I.

Folgerung 3: Mit Induktion nach m. Selber machen.

4.3.13 Beispiele

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\end{aligned}$$

(2) **Logarithmusreihe:** Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

hat Konvergenzradius 1. Es ist $f(0) = 0$, $\log(1 + 0) = 0$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \\ &= \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx} \log(1+x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \log(1 + x) = f(x)$ in $(-1, 1)$. Für $x \to 1-$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\log 2 \\ \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konvergiert}\end{array}\right\} \text{Abelscher Grenzwertsatz}$$

Also: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$

(3) **Arcustangensreihe:** Für $-1 < x < 1$ gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

hat Konvergenzradius 1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \\ &= \frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx} \arctan x \end{aligned}$$

Also ist $\arctan x = f(x) + c$ mit einer Konstanten c.
Für $x = 0$ ist $\arctan(0) = 0$ und $f(0) = 0$. Also ist $c = 0$.

4.4 Der Satz von Taylor

4.4.1 Beispiele

1. Beispiel: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $(-r, r)$.

$f \in C^\infty((-r,r))$, $f^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n x^{n-m}$

Für $x = 0$ gilt: $f^{(m)}(0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m$. Also $a_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Frage: Sei $f \in C^\infty(I)$ und $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Gilt: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$?

NEIN!

2. Beispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Behauptung: Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

Damit ist $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Beweis: Zeige

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit P_n =Polynom vom Grad $3n$.
Beweis durch Induktion:

n = 0: $P_0(x) = 1$: $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$.
n ↦ n + 1: Für $x \neq 0$ ist nach I. V.:

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} e^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= e^{-1/x^2}\left[-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

Setze $\frac{1}{x} = y$:

$$P_{n+1}(y) = -y^2 \cdot \underbrace{P_n'(y)}_{\text{Grad}=3n-1} + 2 \cdot \underbrace{y^3 \cdot P_n(y)}_{\text{Grad}=3n+3}$$

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{y\to\infty} P_n(y) e^{-y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

Sei $|y| \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |P_n(y)| &= \left|c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3n} y^{3n}\right| \\ &\leq (|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{3n}|) \cdot y^{3n} \\ &= C \cdot y^{3n} \end{aligned}$$

Gilt nun $y^{3n} \cdot e^{-y^2} \to 0$ für $y \to \infty$?

$$\frac{y^{3n}}{e^{y^2}} < \frac{y^{3n}}{\frac{y^{4n}}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{y^n} \xrightarrow{y\to\infty} 0$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{k!} > \frac{y^{2\cdot 2n}}{(2n)!}\right]$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
Nach einem früheren Satz existiert dann auch $f^{(n)}(0) = 0$.

4.4.2 Hilfssatz

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f nun $(n+1)$-mal differenzierbar in I mit $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, dann gilt für $x \in I$ und $x \neq a$:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ξ liegt dabei zwischen x und a.

Beweis: mit Induktion.

$n = 0$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{MWS}}{=} f'(\xi)$$

$n \mapsto n + 1$: Sei $g = f'$.

g ist $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.

Induktionsvoraussetzung:

$$\frac{f'(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+2}} \stackrel{\text{vMWS}}{=} \frac{f'(\xi_1)}{(n+2)(\xi_1 - a)^{n+1}} &= \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)(n+1)!} \\ &= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Dabei liegt ξ_1 zwischen a und x und ξ liegt zwischen a und ξ_1.

4.4.3 Definition: Das Taylorpolynom

f sei n-mal differenzierbar im Intervall I und $a \in I$. Dann heißt

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

n-tes Taylorpolynom von f.

4.4.4 Bemerkung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \iff T_n(x;a) \to f(x) \text{ für } n \to \infty \tag{4.4}$$

Es gilt $T_n^{(k)}(x;a)|_{x=a} = f^{(k)}(a)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4.4.5 Satz von Taylor

Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar in I und ist $a \in I$, dann gilt

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

mit

$$R_n(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei liegt ξ zwischen a und x. IR_n heißt *Lagrange-Restglied.* Ist $f \in C^\infty(I)$, so gilt (4.4) genau dann, wenn $R_n(x;a) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis: Setze $g(x) = f(x) - T_n(x;a)$. $g(x)$ ist $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.
Hilfssatz $\Rightarrow$ Es ex. ein ξ zwischen a und x, so daß

$$R_n(x;a) = g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

da $f^{(n+1)} = g^{(n+1)} + \underbrace{T_n^{(n+1)}}_{=0}$.

4.4.6 Beispiele

1. Beispiel: Behauptung:

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$$

Sei $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n} \end{aligned}$$

Damit sind:

$$\begin{aligned} T_n(x;0) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \\ R_n(x;0) &= \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \end{aligned}$$

Behauptung: Für $-1 < x < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Beweis: für $-\frac{1}{2} < x < 1$: Zuerst für $0 < x < 1$: Sei $0 < \xi < x$ und wähle $n > \alpha$:

$$|R_n(x;0)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} |\underbrace{(1+\xi)^{\alpha-n-1}}_{\leq (1+0)^{\alpha-n-1}=1}| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{n+1}$ für $-1 < x < 1$ konvergiert.

Nun für $-1 < x < 0$: Sei $x < \xi < 0$ und wähle $n > \alpha$:

$$|R_n(x;0)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |x|^{n+1} \cdot \left|\underbrace{(1+\xi)^{\alpha-n-1}}_{\leq (1+0)^{\alpha-n-1}=1}\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |1+\xi|^\alpha \cdot \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \overset{?}{\to} 0$$

$R_n(x;0) \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$. Hier: $x > -\frac{1}{2}$.

2. Beispiel: Die Arcussinusreihe:
Behauptung:

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)(2n+1)} x^{2n+1} \text{ für } -1 < x < 1.\end{aligned}$$

Beweis: Für $-\frac{1}{2} < x^2 < 1$, d. h. für $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (1-x^2)^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n \quad \text{(vgl. 1. Beispiel)}\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ hat Konvergenzradius 1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{dx}\arcsin x$$

Aus $\arcsin(0) = 0$, $f(0) = 0$ und $f'(x) = \frac{d}{dx}\arcsin x$ folgt: $\arcsin x = f(x)$.
Betrachte nun die Stelle 1:

$$\begin{aligned}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1\cdot 2 \ldots n} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} =?$$

Falls konvergent: Wert nach dem Abelschen Grenzwertsatz

$$= \lim_{x\to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konvergiert diese Reihe?

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1\ldots(2n-1)}{2\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} &= \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{N} \frac{1\ldots(2n-1)}{2\ldots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &\le \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz.

4.5 Extremwertrechnung

4.5.1 Definition: relatives Minimum/Maximum

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. f hat in x_0 ein *relatives Maximum* [*Minimum*], wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x_0) \ge f(x)$ $[f(x_0) \le f(x)]$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.

4.5.2 Satz

Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

(1) Hat f in $x_0 \in (a,b)$ ein relatives Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

(2) Wechselt f' in x_0 das Vorzeichen, so hat f in x_0 ein relatives Extremum.

  (i) Ist $f'(x) < 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ ist es ein Minimum.

  (ii) Ist $f'(x) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) < 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ ist es ein Maximum.

Beweis:

(1) Siehe Satz von Rolle (4.2.3 auf Seite 78).

(2) hier für (i):
f ist fallend in $(x_0 - \delta, x_0)$ und f ist wachsend in $(x_0, x_0 + \delta)$. Das heißt, f hat ein Minimum in x_0.

4.5.3 Satz

1. Ist $f \in C^2(I)$, $I = (a,b)$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $[f''(x_0) < 0]$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum [Maximum].
2. Ist $f \in C^{2n}(I)$ mit $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(2n)}(x_0) > 0$ $[f^{(2n)}(x_0) < 0]$, so liegt in x_0 ein relatives Minimum [Maximum].

Beweis: Zu 2. mit dem Satz von Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{2n-1}(x;x_0) + R_{2n-1}(x;x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \underbrace{(x-x_0)^{2n}}_{>0 \text{ für } x \neq x_0} \end{aligned}$$

mit ξ zwischen x und x_0.
z. B. $f^{(2n)}(x_0) > 0$:
Da $f^{(2n)}$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f^{(2n)}(\xi) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}}_{>0 \text{ für } |x-x_0|<\delta} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{2n}}_{>0} > 0 \text{ für } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Also ist $f(x) > f(x_0) \Rightarrow$ relatives Minimum.
Für $f^{(2n)} < 0$ und relatives Minimum genauso.

4.5.4 Beispiele

Beispiel 1: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ in $(0, \infty)$.

Es ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$.

Also hat f ein Minimum bei 1.

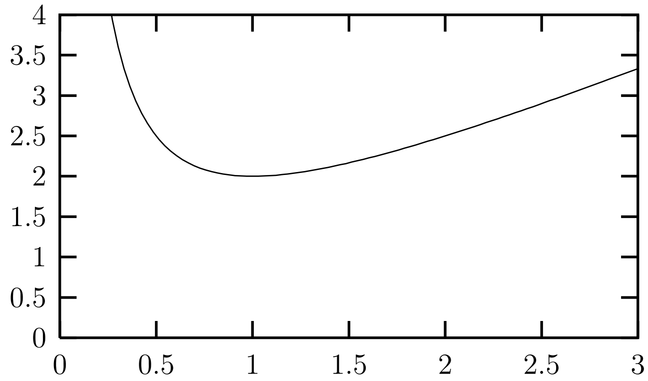


Abbildung 4.6: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Beispiel 2: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ in $\mathbb{R}$.
Es ist $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, sowie $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$ und $f(x) > 0$ für $x \neq 0$.
Es ist $f'(x) = 0$ genau für $x = 0$ und $x = 2$. Dabei ist $f''(0) = 2$ und $f''(2) = -2e^{-2} < 0$.
$f''(x) \overset{!}{=} 0$ für $x = 2 \pm \sqrt{2}$

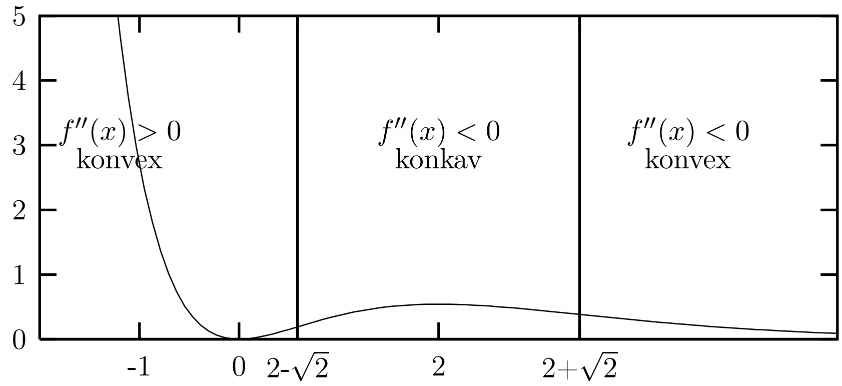


Abbildung 4.7: $f(x) = x^2 e^{-x}$

5 Das Riemannsche Integral[1]

5.1 Darbouxsche Summen

Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt (d. h. $f(I)$ ist beschränkt).
$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ heißt *Zerlegung* von $[a, b]$.
$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ist ein Teilintervall der Zerlegung und es werden definiert: $m_k = \inf f(I_k)$ und $M_k = \sup f(I_k)$.

5.1.1 Definition: Darbouxsche Ober- und Untersumme

$$s(Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

heißt (Darbouxsche) *Untersumme* und

$$S(Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

heißt (Darbouxsche) *Obersumme*. Es gilt:

$$s(Z) \leq S(Z)$$

5.1.2 Hilfssatz

(a) Ist $Z \subseteq Z'$ (d. h. Z' ist eine Verfeinerung von Z), dann gilt

$$s(Z) \leq s(Z') \text{ und } S(Z) \geq S(Z').$$

(b) Es gilt: $s(Z_1) \leq S(Z_2)$ für jedes Paar von Zerlegungen Z_1 und Z_2.

Beweis:

(a) Induktion nach der Zahl p der Punkte in $Z' \setminus Z$:
$\mathbf{p = 1}$: Sei $Z' = Z \cup \{\xi\}$. ξ teile das Intervall I_k. Es ist dann $m'_k := \inf f([x_{k-1}, \xi]) = \inf f(I'_k) \geq m_k$ und $m''_k := \inf f([\xi, x_k]) = \inf f(I'_k) \geq m_k$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} s(Z) - s(Z') =& (x_k - x_{k-1}) m_k - ((\xi - x_{x-1}) m'_k + (x_k - \xi) m''_k) \\ =& \underbrace{(x_k - \xi)}_{>0} \cdot \underbrace{(m_k - m''_k)}_{\leq 0} + \underbrace{(\xi - x_{k-1}}_{>0} \cdot \underbrace{(m_k - m'_k)}_{\leq 0} \\ \leq& 0 \end{aligned}$$

Zeige genauso $S(Z) - S(Z') \geq 0$.
Induktionsschritt als Aufgabe.

[1] Version 4.6 vom 18. Dezember 2002

(b) Sei $Z_1 \cup Z_2 = Z$ gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Dann gilt:

$$s(Z_1) \overset{\text{(a)}}{\leq} s(Z) \leq S(Z) \overset{\text{(a)}}{\leq} S(Z_2)$$

5.1.3 Definition: Unteres und oberes Integral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s(Z) \colon Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *unteres Integral* von f und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{S(Z) \colon Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *oberes Integral* von f. Es gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

5.1.4 Definition: Integrierbar, Riemannintegral

Gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

so heißt f (Riemann-)integrierbar. Kurz $f \in R([a,b])$. Der gemeinsame Wert ist das Riemannintegral von f:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

5.1.5 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $S(z) - s(Z) < \varepsilon$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ f sei integrierbar, d. h. das obere und das untere Integral sind gleich. Sei nun $\varepsilon > 0$. Zu diesem ε existiert eine Zerlegung Z_1 mit

$$s(Z_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Genauso existiert eine Zerlegung Z_2 mit

$$S(Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Sei nun $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt:

$$S(z) - s(Z) \overset{\text{(a)}}{\leq} S(Z_2) - s(Z_1) = S(Z_2) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - s(Z_1) \leq 2\varepsilon.$$

„$\Leftarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx &\overset{\forall Z}{\leq} S(Z) - s(Z) \overset{\exists Z}{<} \varepsilon \\
\Rightarrow \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\geq 0} &\leq 0 \\
\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx &\quad \Rightarrow f \in R([a,b])
\end{aligned}$$

5.1.6 Satz: Monotone Funktionen sind integrierbar

Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und Z_n eine äquidistante Zerlegung mit $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Sei z. B. $f \nearrow$:

$$\begin{aligned}
S(Z_n) - s(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_k) - f(x_{x-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= (b-a)(f(b) - f(a)) \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für große } n
\end{aligned}$$

5.1.7 Beispiele

(1) Es ist $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$. Wähle eine äquidistante Zerlegung mit $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k = a + hk$.

$$\begin{aligned}
S(Z) &= h \sum_{k=1}^{n} e^{a+kh} = he^a \sum_{k=1}^{n} (e^h)^k \\
&= he^a e^h \sum_{k=0}^{n-1} (e^h)^k = he^a e^h \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{e^h-1} e^h e^a (e^{b-a}-1) = \frac{h}{e^h-1} e^h (e^b - e^a) \\
s(Z) &= \frac{h}{e^h-1}(e^b-e^a)
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, d. h. $h \to 0$ gilt:

$$\left.\begin{array}{r} s(Z_n) \to e^b - e^a \\ S(Z_n) \to e^b - e^a \end{array}\right\} = \int_a^b e^x \, dx$$

$$e^b - e^a \leftarrow s(Z_n) \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq S(Z_n) \to e^b - e^a$$

(2) Für $p \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$ ist $\int\limits_a^b x^p = \dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

Äquidistante Zerlegung: $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + a$

$$S(Z) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k \right)^p = ?$$

Geometrische Zerlegung: $q = \sqrt[n]{b/a}$, $x_k = a \cdot q^k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
S(Z) &= \sum_{k=1}^{n} (a \cdot q^k - a \cdot q^{k-1}) \cdot a^p \cdot (a^k)^p = a^{p+1} \sum_{k=1}^{n} (q-1) \cdot q^{k-1} \cdot q^{kp} \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} (q^{p+1})^k \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot q^{p+1} \sum_{k=0}^{n} (q^{p+1})^k \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot q^{p+1} \cdot \frac{q^{(p+1)n} - 1}{q^{p+1} - 1} \\
&= a^{p+1} \cdot q^p \cdot \left((b/a)^{p+1} - 1 \right) \cdot \frac{q-1}{q^{p+1}-1} \\
&= q^p (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{p+1}-1} \to 1 \cdot (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot \frac{1}{p+1} \text{ für } n \to \infty, \text{ d. h. } q \to 1 \\
s(Z) &= \cdots \to \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

5.1.8 Hilfssatz

1. Für $a < c < b$ gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^c} f(x)\, dx + \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

2. Ist $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b]$, dann ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)\, dx.$$

3. Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, dann ist

$$F(x) := \overline{\int_a^x} f(t)\,dt, \qquad F(a) = 0$$

in x_0 differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Entsprechendes gilt für das untere Integral.

Beweis:

(a) „$\leq$“ Sei Z Zerlegung von $[a,b]$,
$Z_1 = \{c\} \cup (Z \cap [a,c])$ und $Z_2 = \{c\} \cup (Z \cap [c,b])$:

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx &\leq S(Z_1) + S(Z_2) \\ &= S(Z \cup \{c\}) \leq S(Z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

„$\geq$“ Sei Z_1 Zerlegung von $[a,c]$ und Z_2 Zerlegung von $[c,b]$.
Setze $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(Z) = S(Z_1) + S(Z_2)$$

Für festes Z_2 gilt dann

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(Z_2) \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx,$$

also

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx \leq S(Z_2)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx \leq \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \qquad \Rightarrow \text{Beh.}$$

(b) klar nach Definition.

(c) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und F definiert wie in der Behauptung.
Zu zeigen ist: f stetig in $x_0 \in [a,b] \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$.

Bemerkung: Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b c\,dx = (b-a)\cdot c$.
Beweis: für den Fall $x_0 < b$. Sei $h > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) &\overset{(a)}{=} \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert in $\delta > 0$ mit $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$ für $t \in [a,b]$ mit $|t-x_0| < \delta$. Also gilt: $-\varepsilon < f(t)-f(x_0) < \varepsilon$. Daraus folgt:

$$-\varepsilon = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} -\varepsilon\,dt < \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) < \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

das heißt:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon \text{ für } 0 < h < \delta.$$

Genauso für $-\delta < h < 0$, d. h. $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.1.9 Satz: Stetige Funktionen sind integrierbar

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, d. h. $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$.

1. Beweis: Sei für $a < x \leq b$

$$H(x) := \overline{\int\limits_a^x} f(t)\,dt - \underline{\int\limits_a^x} f(t)\,dt \text{ mit } H(a) = 0$$

Nach (c) ist dann in $[a,b]$

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

d. h. $H(x) = H(a) = 0$ für $x \in [a,b]$, insbesondere ist $H(b) = 0$, also gilt:

$$\overline{\int\limits_a^b} f(t)\,dt = \underline{\int\limits_a^b} f(t)\,dt.$$

2. Beweis: Sei f gleichmäßig stetig. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$. Wähle eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $x_k - x_{k-1} < \delta$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Dann gilt:

$$S(Z) - s(Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(\xi_k) - f(\eta_k))$$

mit $\max\limits_{I_k} f(x) = f(\xi_k)$ mit $\xi_k \in I_k$ und $\min\limits_{I_k} f(x) = f(\eta_k)$ mit $\eta_k \in I_k$. Daraus folgt:

$$S(Z) - s(Z) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (b-a)\varepsilon.$$

Nach dem Riemannkriterium ist dann $f \in R([a,b])$.

5.1.10 Satz

Ist $F \in C^1([a,b])$ und $F' = f$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Sei $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ mit $H(a) = 0$. Es ist dann $H \in C^1([a,b])$ mit $H'(x) = f(x)$. $\Rightarrow$ $F(x) = H(x) + \text{const}$. Für $x = a$ gilt dann $F(a) = 0 + \text{const}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = H(b) = F(b) - F(a)$$

5.2 Riemannsche Summen

5.2.1 Definition: Riemannsche Zwischensumme

Ist Z eine Zerlegung, so setzt man

$$\sigma(Z,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

σ heißt *Riemannsche Zwischensumme* zum Zwischenpunktsystem (ZWPS) $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, wobei $\xi_k \in I_k$ ist.

5.2.2 Hilfssatz

Es gilt

$$s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq S(Z)$$

und

$$\begin{aligned} s(Z) &= \inf\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\} \\ S(Z) &= \sup\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\} \end{aligned}$$

Beweis: Die Ungleichung $s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq S(Z)$ ist klar.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $\xi_k \in I_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit $f(\xi_k) < m_k + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \sigma(Z,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{n} (m_k + \varepsilon)(x_k - x_{k-1}) \\ &= s(Z) - \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Die Rechnung ist für $S(Z)$ analog.
Aufgabe: Falls f stetig ist, ist $s(Z) = \min\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\}$.

5.2.3 Satz

f ist genau dann Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)\,dx = J$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $|\sigma(Z,\xi) - J| < \varepsilon$ für alle ZWPSe ξ.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $f \in R([a,b])$ und $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$. Sei nun ξ ein beliebiges ZWPS. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(Z,\varepsilon) - J &\le S(Z) - J \le S(Z) - s(Z) < \varepsilon \\ J - \sigma(Z,\varepsilon) &\le J - s(Z) \le S(Z) - s(Z) < \varepsilon\end{aligned}$$

Daraus folgt: $|\sigma(Z,\xi) - J| < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Zu $\varepsilon > 0$ existiere nach Voraussetzung ein Z mit $-\varepsilon < \sigma(Z,\xi) - J < \varepsilon$ für alle ZWPSe ξ. Mit dem Hilfssatz 5.2.2 folgt dann:

$$\begin{aligned}S(Z) - J &\le \varepsilon \\ -\varepsilon &\le s(Z) - J \\ \Rightarrow S(Z) - s(Z) &\le \varepsilon + J - (J - \varepsilon) = 2\varepsilon \\ \Rightarrow f &\in R([a,b]).\end{aligned}$$

Mit dem 1. Teil folgt dann $\int\limits_a^b f(x)\,dx = J$.

5.2.4 Satz

Seien (Z_m) Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_m| \to 0$ für $m \to \infty$ (Dabei ist $|Z| := \max |I_k|$ das Feinheitsmaß—die Länge des längsten Teilintervalls—von Z). Dann gilt:

(a)

$$\lim_{m\to\infty} s(Z_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(b)

$$\lim_{m\to\infty} S(Z_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(c)

$$\lim_{m\to\infty} \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

für beliebige ZWPSe $\xi^{(m)}$ für Z_m, falls $f \in R([a,b])$.

Beweis: In 5.2.6.

5.2.5 Hilfssatz

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq M$ für $a \leq x \leq b$. Z und Z_0 seien Zerlegungen von $[a,b]$, Z_0 habe $p+2$ Teilpunkte. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(Z \cup Z_0) &\leq s(Z) + 2pM|Z \cup Z_0| \\ S(Z \cup Z_0) &\leq s(Z) - 2pM|Z \cup Z_0|. \end{aligned}$$

Beweis: Für die Untersumme. Per Induktion nach p:

$p = 1$: Sei $Z_0 = \{x, \overline{x}, b\}$ mit $\overline{x} \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$. Teile I_k auf in $I'_k = [x_{k-1}, \overline{x}]$ und $I''_k = [\overline{x}, x_k]$. Setze $m'_k = \inf f(I'_k)$ und $m''_k = \inf f(I''_k)$.
Es gilt $m_k = m'_k$ oder $m_k = m''_k$, und es gilt $-M \leq m_k, m'_k, m''_k \leq M$. Damit ist

$$\begin{aligned} s(Z \cup Z_0) - s(Z) &= (\overline{x} - x_{k-1})m'_k + (x_k - \overline{x})m''_k - (x_k - x_{k-1})m_k \\ &\leq \max\{\overline{x} - x_{k-1}, x_k - \overline{x}\} \cdot 2M \\ &\leq |Z \cup Z_0| \cdot 2M \end{aligned}$$

$p \mapsto p+1$: Selber machen.

5.2.6 Beweis für 5.2.4

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein Z_0 mit

$$\underline{J} = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

so daß $\underline{J} - s(Z_0) < \varepsilon$ ist. Z_0 habe $p+2$ Teilpunkte. Dann gilt:

$$s(Z_n \cup Z_0) \leq s(Z_n) + 2pM|Z_n \cup Z_0|.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \underline{J} &\geq s(Z_n) \\ &\geq s(Z_n \cup Z_0) - 2pM|Z_n \cup Z_0| \\ &\geq s(Z_0) - 2pM|Z_n| \\ &> \underline{J} - \varepsilon - 2pM|Z_n| \end{aligned}$$

damit ist $0 \leq \underline{J} - s(Z_n) < \varepsilon + 2pM|Z_n| < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$, d. h. $|\underline{J} - s(Z_n)| < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$.

(b) $S(Z_n)$ genauso.

(c) Sei $J = \int\limits_a^b f(x)\, dx$. Dann ist:

$$\begin{gathered} s(Z_m) \leq \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) \leq S(Z_m) \\ \underbrace{s(Z_m) - J}_{\to 0\ (m \to \infty)} \leq \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) - J \leq \underbrace{S(Z_m) - J}_{\to 0\ (m \to \infty)} \\ \Rightarrow (\sigma(Z_m, \xi^{(m)}) - J) \to 0 \text{ für } m \to \infty \end{gathered}$$

5.2.7 Regeln für Riemann-integrierbare Funktionen

(a) $f, g \in R(I) \Rightarrow (f+g) \in R(I)$ mit $\int\limits_a^b (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

(b) $f \in R(I)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cf) \in R(I)$ mit $\int\limits_a^b (cf)(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(c) $f, g \in R(I) \Rightarrow (fg) \in R(I)$.

(d) $g \in R(I)$, $|g(x)| \geq c > 0$ für $a \leq x \leq b \Rightarrow 1/g \in R(I)$.

(e) $f, g \in R(I)$, $f(x) \leq g(x)$ für $a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

(f) $f \in R(I) \Rightarrow |f| \in R(I)$ und $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

(g) $f \in R([a,c])$ und $f \in R([c,b]) \Rightarrow f \in R([a,b])$
mit $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Beweis:

(a),(b),(e): Sei (Z_n) eine Zerlegungsfolge mit $|Z_n| \to 0$ und ZWPSen $\xi^{(n)}$. Definiere nun $\sigma_n := \sigma(Z_n, \xi^{(n)})$. Aus den Regeln für konvergente Folgen folgen dann die Behauptungen (a), (b) und (e).

(c),(d),(f): Vorbemerkung: Gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x)|$$

und $\varphi_j \in R(I)$, dann ist $f \in R(I)$.
Beweis: Sei Z Zerlegung mit den Intervallen I_k. Es ist

$$\begin{aligned} M_k - m_k &= \sup f(I_k) - \inf f(I_k) \\ &= \sup\{(f(x) - f(y))\colon x, y \in I_k\} \\ &\leq C \cdot \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} \varphi_j(x) - \varphi_j(y)\colon x, y \in I_k\right\} \\ &\leq C \cdot \sum_{j=1}^{m} \sup \varphi_j(I_k) - \inf \varphi_j(I_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(Z; f) - s(Z; f) &\leq C \sum_{j=1}^{m} S(Z; \varphi_j) - s(Z; \varphi_j) \\ &\leq \varepsilon \text{ für geeignetes } Z \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in R(I)$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x)-f(y)\cdot g(y)| &= |(f(x)-f(y))\cdot g(x)+(f(x)-g(y))\cdot f(y)|\\ &\le |f(x)-f(y)|\cdot M+|g(x)-g(y)|\cdot M\end{aligned}$$

Setze nun $\varphi_1 = f$ und $\varphi_2 = g$. M ist Schranke für g und f. Aus der Vorbemerkung folgt dann: $fg \in R(I)$.

(d)

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right| &= \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(y)g(x)}\right|\\ &\le \frac{1}{c^2}\cdot|g(x)-g(y)|\end{aligned}$$

$\Rightarrow 1/g \in R(I)$.

(f) Es ist $||f(x)|-|f(y)|| \le |f(x)-f(x)| \Rightarrow |f| \in R(I)$. Dabei ist

$$\begin{aligned}|\sigma(Z,\xi,f)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|\\ &\le \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\cdot(x_k-x_{k-1})\\ &= \sigma(Z,\xi,|f|)\end{aligned}$$

oder mit (e): $-|f| \le f \le |f|$.

(g): schon bewiesen in 5.1.8 auf Seite 100.

5.2.8 Satz

Ist $f_n \in R(I)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$, dann ist $f \in R(I)$ und

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein n_0 mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$ und $x \in I$. Für eine Zerlegung Z mit ZWPS ξ gilt:

$$|\sigma(Z,\xi,f)-\sigma(Z,\xi,f_n)| < \varepsilon(b-a)$$

Für die Zerlegungsfolge (Z_m) mit $|Z_m| \to 0$ und ZWPSen $\xi^{(m)}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(Z_m,\xi^{(m)},f) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

$\Rightarrow f \in R(I)$ und $\int f = \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n$.

5.3 Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

5.3.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to [m,M]$ Riemann-integrierbar, dann gilt:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Beweis: Aus $m \leq f(x) \leq M$ folgt $m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$.
Ist f stetig, so ist

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

d. h. es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

5.3.2 Definition: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

$F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f\colon I \to \mathbb{R}$, wenn $F' = f$ in I ist. Statt Stammfunktion nennt man F *unbestimmtes Integral* von f, kurz $\int f$.

5.3.3 Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

(a) Hat $f \in R(I)$ $(I = [a,b])$ eine Stammfunktion F, so gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

(b) $f \in C([a,b])$ hat eine Stammfunktion:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Beweis:

(a) Sei Z_n mit $x_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, eine Folge von äquidistanten Zerlegungen. Dann ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)}) \Big) \\ &\overset{\substack{\text{MWS} \\ \text{Diff.}}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \end{aligned}$$

mit $x_{k-1}^{(n)} < \xi_k^{(n)} < x_k^{(n)}$:

$$\begin{aligned} &= \sigma(Z_n, \xi^{(n)}) \\ &\to \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Eigentlich ist es „=“ statt „→“, da $F(b) - F(a)$ konstant ist.

(b) schon bewiesen.

5.3.4 Beispiel

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. Wie geht $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gegen ∞?

$$\begin{aligned} s_n &< 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = 1 + \log n \\ s_n &> \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \log n \\ \Rightarrow\ 0 &< \underbrace{s_n - \log n}_{=: c_n} < 1 \end{aligned}$$

Dabei ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \gamma$ die *Euler-Mascheronische Konstante.* c_n ist streng fallend, da

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \\ &= \frac{1}{n+1} - [\log(n+1) - \log n] \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \\ &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

also ist c_n konvergent, da c_n auch beschränkt ist.

5.3.5 Partielle Integration

(a) Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat $f'g$ eine Stammfunktion, so hat auch $f'g$ eine Stammfunktion und es gilt
$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

(b) Sind $f, g \in C^1([a, b])$, so gilt
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis: (für (a), denn aus (a) folgt (b)):
$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg' \\ \Rightarrow fg' &= (fg)' - f'g \\ \Rightarrow \int fg' &= fg - \int f'g \end{aligned}$$

5.3.6 Substitutionsregel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, und $\varphi\colon J \to I$ sei differenzierbar.

(a) Hat f eine Stammfunktion F, so hat $(f \circ \varphi)\varphi'$ eine Stammfunktion: $F \circ \varphi$
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \tag{5.1}$$

(b) Hat $(f \circ \varphi)\varphi'$ eine Stammfunktion, so auch f und es gilt (5.1), falls $\varphi'(t) \neq 0$ in J.

(c) Ist f stetig in $I = [a, b]$, φ stetig differenzierbar in $J = [\alpha, \beta]$ mit $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$, dann gilt
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis:

(a) Mit der Kettenregel: Sei $G(t) = F(\varphi(t))$. Dann ist
$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$
$\Rightarrow F(\varphi(t))$ ist Stammfunktion von $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

(b) φ ist injektiv. Die Umkehrfunktion sei ψ.
ψ ist differenzierbar mit $\psi'(s) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}\Big|_{t=\psi(s)}$.
Setze $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ und $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$. Wende dann Teil (a) auf g mit Stammfunktion G an. Dann hat $f = (g \circ \psi) \cdot \psi'$ eine Stammfunktion $F = (G \circ \psi)$.

(c) f hat Stammfunktion F, da f stetig ist. $G(x) = F(\varphi(x))$ ist stetig differenzierbar mit $G'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Es ist also

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx &= F(x)\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

5.3.7 Beispiel

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^3 \cdot e^{\cos x}\,dx &= \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:} \\ t = \cos x = \varphi(x) \\ \frac{dt}{dx} = \varphi' = -\sin x \\ dt = \varphi'(x)\,dx = -\sin x\,dx\end{array}\right| \\ &= -\int e^t \cdot (1 - t^2)\,dt = -e^t + \int t^2 e^t\,dt \\ &= -e^t + t^2 e^t - \int 2te^t\,dt \\ &= -e^t + t^2 e^t - 2te^t + 2\int e^t\,dt \\ &= -e^t + (t^2 - 2t + 2)e^t \\ &= e^t(t^2 - 2t + 1) = e^t(t-1)^2 \\ &= e^{\cos x}(\cos x - 1)^2\end{aligned}$$

5.3.8 Satz von Taylor mit Integralrestglied

f sei $(n+1)$-mal differenzierbar in I, $a \in I$. Dann ist

$$T_n(x;a) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$
$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

dabei gilt:

1. $R_n(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ mit ξ zwischen a und x (*Lagrange-Restglied*, schon bewiesen in 4.4.5 auf Seite 92).
2. Ist $f^{(n+1)}$ integrierbar, so ist

$$R_n(x;a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

genannt *Integralrestglied*.

Beweis: mit Induktion nach n.

$n = 0$: Es ist $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ (Hauptsatz).

$(n-1) \mapsto n$: Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) =& T_{n-1}(x;a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \\
=& T_{n-1}(x;a) + \left(-\frac{(x-t)^n}{(n-1)!n} f^{(n)}(t) \right) \Bigg|_a^x \\
&+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
=& T_{n-1}(x;a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x;a) \\
=& T_n(x;a) + R_n(x;a)
\end{aligned}$$

5.3.9 Satz von Bernstein

Ist $f \in C^\infty((-r,r))$ und ist $f^{(n)}(x) \geq 0$ für $-r < x < r$ für (fast) alle n, dann gilt in $(-r,r)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Bemerkung: Der Satz gilt auch, falls $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ in $-r < x < r$ für fast alle n.

Beweis: Für den Fall $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle n und x.
Sei zunächst $\mathbf{0 \leq x < r}$.
Dann ist $R_n(x;0;f) \geq 0$, d. h. $T_n(x;0) \leq f(x)$, denn

$$T_{n+1}(x;0) = T_n(x;0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x^{n+1}}_{\geq 0} \geq T_n(x;0)$$

Damit ist auch in $0 \leq x < r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \leq f(x).$$

Es gilt:

$$R_n(x;0;f) \leq R_{n-1}(x;0;f) \leq \cdots \leq R_0(x;0;f)$$

Wähle nun zu x_0, $0 \leq x_0 < r$ ein $q > 1$ so, daß $q \cdot x_0 < r$ ist.
Setze $F(x) := f(q \cdot x)$ in $[0, r/q)$. Dann ist $F^{(n)}(x) = q^n f^{(n)}(qx)$, $F^{(n)}(x) \geq 0$, und es gilt

$$R_n(x;0;F) \leq R_0(x;0;F).$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} R_n(x;0;f) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \frac{F^{(n+1)}(\frac{t}{q})}{q^n}\,dt \end{aligned}$$

Einschub: Aus $q > 1$ folgt $\frac{t}{q} < t$.
Es ist $F^{(n+1)}(s) \geq 0$ und $F^{(n)}$ ist wachsend, also ist $F^{(n)}(t/q) \leq F^{(n)}(t)$.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{q^n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{q^n} R_n(x;0;F) \\ &\leq \frac{1}{q^n} R_0(x;0;F) \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Da $R_n(x;0;f) \geq 0$ ist,
gilt $R_n(x;0;f) \to 0$ für $n \to \infty$.
Also gilt für $0 \leq x < r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x).$$

Sei nun $-r < x \leq 0$.
Sei $t \leq 0$.
Dann ist $f^{(n)}(t) \leq f^{(n)}(-t)$,
da $f^{(n)}$ monoton wachsend ist.

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| \\ &= \left| \begin{matrix} \text{Subst.:} \\ s = -t \\ ds = -dt \end{matrix} \right| \\ &= \left| \int_0^{-x} \frac{(x+s)^n}{n!} f^{(n+1)}(-s)\,ds \right| \\ &\leq \int_0^{-x} \frac{(x+s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\,ds \\ &= R_n(-x;0;f) \to 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow R_n(x;f) \to 0$ für $n \to \infty$ auch für $-r < x \leq 0$.

5.3.10 Beispiel

$f(x) = (1-x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\alpha(1-x)^{\alpha-1} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n} \\ f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1-x)^{\alpha-n-1} \\ &= (-1)^n(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n}\cdot(-1)(\alpha-n)(1-x)^{-1} \\ &= f^{(n)}(x)\cdot\underbrace{(n-\alpha)}_{>0}\cdot\underbrace{(1-x)^{-1}}_{>0} \end{aligned}$$

für $n > \alpha$ und $-1 < x < 1$. Also haben für $n > \alpha$ und $-1 < x < 1$ alle Ableitungen immer das selbe Vorzeichen. Mit dem Satz von Bernstein gilt nun in $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} (1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n \\ = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n. \end{aligned}$$

Weitere Beispiele: $\log(1+x)$ oder $\arcsin x$: Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n}$$

Also ist

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

5.4 Integration von rationalen Funktionen

5.4.1 Problem

Sei $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit teilerfremden Polynomen P und Q, d. h. es gibt kein nicht konstantes Polynom H mit $P(x) = P_1(x)H(x)$ und $Q(x) = Q_1(x)H(x)$. Was ist dann

$$\int R(x)\,dx?$$

5.4.2 Prinzip

1. Schritt: Polynomdivision mit Rest:

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \text{ mit } \mathrm{Grad}(P_1) < \mathrm{Grad}(Q).$$

2. Schritt: Zerlege Q in elementare Faktoren der Form $(x-\xi)^r$ und/oder $(x^2+2bx+a)^s$ mit $a > b^2$ (Die Existenz der Zerlegung wird in 6.3.14 auf der Seite 139 gezeigt).

3. Schritt: Schreibe $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ als endliche Summe von Funktionen

$$\frac{\alpha_1}{x-\xi} + \cdots + \frac{\alpha_r}{(x-\xi)^r}$$

bzw.

$$\frac{\beta_1 + \gamma_1 x}{x^2+2bx+a} + \cdots + \frac{\beta_s + \gamma_s x}{(x^2+2bx+a)^s}$$

(Partialbruchzerlegung, Beweis in 6.3.16 auf Seite 141)

4. Schritt: Bestimme Stammfunktionen für

$$\frac{\alpha_j}{(x-\xi)^j} \text{ und } \frac{\beta_j + \gamma_j x}{(x^2+2bx+a)^j}.$$

5.4.3 Beispiele

1. Beispiel:

$$R(x) = \frac{x+2}{x^4 - x^2}$$

1. Schritt: entfällt

2. Schritt: Es ist $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$.

3. Schritt:

$$R(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

Was sind die Werte für A, B, C und D?. Es ist

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to 0} x^2 R(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2-1} = -2 \\
C &= \lim_{x\to 1} (x-1)R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{3}{2} \\
D &= \lim_{x\to -1} (x+1)R(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

B ist so nicht berechenbar. Bis hierhin ist folgendes bekannt:

$$R(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}.$$

Setze einen speziellen Wert ein, z. B. $x = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{16-4} &= \frac{-2}{4} + \frac{B}{2} + \frac{3/2}{1} + \frac{-1/2}{3} \\
B &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \right) = -1
\end{aligned}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
\int R(x)\,dx &= -2 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{2}{x} - \log|x| + \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1|
\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$R(x) = \frac{x+3}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

1. Schritt: entfällt

2. Schritt: Es ist $Q(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2$.

3. Schritt:

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$A = \lim_{x\to 1}(x-1)R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{(x^2+1)^2} = 1$$

Was sind B, C, D und E?
Der Hauptnenner von R ist $(x-1)(x^2+1)^2$.
Der Zähler ist $A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$. Für den Zähler gilt also

$$\begin{aligned} x+3 =& x^4(A+B) + x^3(-B+C) + x^2(2A-C+B+D) \\ &+ x(-B+C-D+E) + (A-C-E) \end{aligned}$$

Es bildet sich ein lineares Gleichungssystem mit

$$\begin{array}{lccccccc} x^4: & A & +B & & & & =0 \\ x^3: & & -B & +C & & & =0 \\ x^2: & 2A & +B & -C & +D & & =0 \\ x^1: & & -B & +C & -D & +E & =1 \\ x^0: & A & & -C & & -E & =3 \end{array}$$

Das Ergebnis ist $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = -2$, $E = -1$. Also ist

$$R(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned} \int R(x)\,dx =& \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &- \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ =& \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \arctan x - \cdots - \cdots \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme sind leider noch nicht berechenbar.

5.4.4 Allgemeines zum 4. Schritt

Typ I:

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)^p} \text{ für } p = 1, 2, \ldots$$

Für $p = 1$ ist

$$\int \frac{dx}{x-\xi} = \log|x-\xi| \; (x \neq \xi)$$

und für $p \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-\xi)^p} &= \frac{1}{(x-\xi)^{p-1}} \cdot \left(\frac{1}{1-p}\right)\\ &= \frac{1}{1-p} \cdot (x-\xi)^{-p+1}.\end{aligned}$$

Typ II:

$$\begin{aligned}\int \frac{A+Bx}{(x^2+2bx+a)^p}\,dx &= \int \frac{A+Bx}{((x+b)^2+a-b^2)^p}\,dx\\ &= \left|\begin{array}{c}\text{setze } a-b^2 = D^2,\ D>0\\ \text{Substitution:}\\ x+b = Dt\\ x = Dt-b\\ dx = D\,dt\end{array}\right|\\ &= \int \frac{A+B(Dt-b)}{((Dt)^2+D^2)^p} D\,dt\\ &= \int \frac{A+BDt-Bb}{(D^2(t^2+1))^p} D\,dt\\ &= \alpha \int \frac{dt}{(t^2+1)^p} + \beta \int \frac{2t}{(t^2+1)^p}\,dt\end{aligned}$$

Nun müssen die beiden Integrale berechnet werden. Zuerst

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)^p}\,dt.$$

Für $p=1$ ist

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \log(1+t^2)$$

und für $p>1$ ist

$$\int \frac{2t}{(1+t^2)^p}\,dt = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{p-1}}.$$

Nun die Berechnung von

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^p}:$$

Für $p=1$ ist

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t = J_1$$

und für $p \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}J_p = \int \frac{dt}{(1+t^2)^p} &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+t^2)^p}}_{v}\,dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^p} - \int t(-p)(1+t^2)^{-p-1}2t\,dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^p} + 2p\int \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{p+1}}\,dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^p} + 2pJ_p - 2pJ_{p+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2pJ_{p+1} = (2p-1)J_p + \frac{t}{(1+t^2)^p}$$

Es ergibt sich damit die Rekursionsformel

$$J_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{2p}\right) J_p + \frac{1}{2p} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^p}$$

z. B. ist

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) J_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

5.4.5 Auf rationale Funktionen zurückführbare Integrale

(a)

$$\int R(e^{ax})\,dx,\ R \text{ rational und } a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int R(e^{ax})\,dx &= \left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ t = e^{ax} \\ \frac{dt}{dx} = ae^{ax} = at \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{a} \int R(t) \frac{1}{t}\,dt = \int R_1(t)\,dt \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{\cosh x} &= \frac{e^{2x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}\,dx \\ &= 2 \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx \\ &= \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ \frac{dt}{t} = dx \end{array} \right| \\ &= 2 \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt \\ &= 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt \\ &= 2 \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= 2t - 2\arctan t \\ &= 2e^x - 2\arctan(e^x) \end{aligned}$$

(b)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx \text{ mit } n \geq 2 \text{ und } ad - bc \neq 0$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ \frac{ax+b}{cx+d} = t^n\\ ax+b = (cx+d)t^n\\ x(a-ct^n) = dt^n - b\\ x = \frac{-b+dt^n}{a-ct^n}\\ \frac{dx}{dt} = \frac{-ad+bc}{(a-ct^n)^2} n t^{n-1}\end{array}\right|$$
$$= \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \cdot \frac{bc-ad}{(a-ct^n)^2}\, dt$$
$$= \int R_1(t)\, dt$$

Beispiel:

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \left|\begin{array}{c}\frac{x}{x+1} = t^2\\ x = t^2(x+1)\\ x(1-t^2) = t^2\\ x = \frac{t^2}{1-t^2}\\ \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\end{array}\right|$$
$$= \int t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\, dt$$
$$= 2\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\, dt$$

(c)

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ t = \tan(x/2)\\ \frac{dt}{dx} = (1+t^2)\frac{1}{2}\\ \sin x = \frac{2r}{1+t^2}\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|$$
$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$
$$= \int R_1(t)\, dt$$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ t = \tan(x/2)\end{array}\right|$$
$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = 2\int \frac{dt}{3+t^2}$$
$$= \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ t = \sqrt{3}\cdot u\\ \frac{dt}{du} = \sqrt{3}\end{array}\right|$$
$$= 2\int \frac{1}{3+3u^2}\sqrt{3}\, du$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan u = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

(d)

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\, dx \text{ mit } a \neq 0$$

Zuerst quadratisches Ergänzen des Termes unter der Wurzel

$$
\begin{aligned}
ax^2+2bx+c &= a\left(x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}}_{=:\Delta}\right)
\end{aligned}
$$

$\Delta = 0$ wurde schon behandelt, denn in diesem Fall handelt es sich um eine rationale Funktion von x.

(i) $a > 0$, $\Delta = D^2 > 0$:

$$
\begin{aligned}
\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right) dx &= \left| \begin{matrix} \text{Substitution:} \\ x+\frac{b}{a} = Dt \\ dx = D\,dt \end{matrix} \right| \\
&= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{a(t^2+1)D^2}\right) \cdot D\,dt \\
&= \int \tilde{R}\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt
\end{aligned}
$$

(ii) $a > 0$, $\Delta = -D^2 < 0$: Dann ist

$$ax^2+2bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 - D^2\right)$$

Substituiere dann $x + \frac{b}{a} = DT$, $dx = D\,dt$:

$$
\begin{aligned}
\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right) dx &= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{aD^2(t^2-1)}\right) \cdot D\,dt \\
&= \int \tilde{R}\left(, \sqrt{t^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

(iii) $a < 0$, $\Delta = -D^2 < 0$:
Substituiere hier $x + \frac{b}{a} = Dt$, $dx = D\,dt$:

$$
\begin{aligned}
\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right) dx &= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{a(D^2t^2-D^2)}\right) \cdot D\,dt \\
&= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{-aD^2}\sqrt{1-t^2}\right) \cdot D\,dt \\
&= \int \tilde{R}\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt
\end{aligned}
$$

Beispiele zu den 3 Fällen:

(i)

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\, dx = ?$$

Es ist $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$, es liegt Typ (i) vor.
Substituiere $x+1 = t\sqrt{2}$, $dx = \sqrt{2}\, dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{2(t^2+1)}\sqrt{2}\, dt = 2\int \sqrt{t^2+1}\, dt$$

(ii)

$$\int \sqrt{x^2+2x-3}\, dx = ?$$

Es ist $x^2+2x-3 = (x+1)^2-4$, es liegt Typ (ii) vor.
Substituiere $x+1 = 2t$, $dx = 2\, dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{4(t^2-1)} \cdot 2\, dt = 4\int \sqrt{t^2-1}\, dt$$

(iii)

$$\int \sqrt{-x^2+2x}\, dx = ?$$

Es ist $-x^2+2x = -(x^2+2x) = -((x-1)^2-1)$, es liegt Typ (iii) vor.
Substituiere $x-1 = t$, $dx = dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{-(t^2-1)}\, dt = \int \sqrt{1-t^2}\, dt$$

Restliche Integrale in den 3 Fällen:

(i) $\sqrt{t^2+1}$. Substitution: $t = \sinh u$, $dt = \cosh u\, du$, $t^2+1 = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$

$$\int \ldots = \int \tilde{R}(\sinh u, \cosh u) \cdot \cosh u\, du = \int \hat{R}(\sinh u, \cosh u)\, du = \int \check{R}(e^u)\, du$$

Am Beispiel:

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{1+t^2}\, dt =& 2\int \cosh u \cdot \cosh u\, du \\
=& 2\int \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du \\
=& \frac{1}{2}\int \left(e^{2u}+2+e^{-2u}\right) du \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\right) \\
=& \frac{1}{4}\exp\left(2\operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \\
&- \frac{1}{4}\exp\left(-2\operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

(ii) $\sqrt{t^2-1}$.
Substitution: $t = \cosh u$, $dt = \sinh u\, du$, $t^2 - 1 = \cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u$:

$$\begin{aligned}\int \ldots &= \int \tilde{R}(\sinh u, \cosh u) \cdot \sinh u\, du \\ &= \int \hat{R}(\sinh u, \cosh u)\, du \\ &= \int \check{R}(e^u)\, du\end{aligned}$$

Am Beispiel:

$$\begin{aligned}4\int \sqrt{t^2-1}\, dt &= 4\int \sinh u \cdot \sinh u\, du \\ &= \int (e^u - e^{-u})^2\, du = \cdots\end{aligned}$$

(iii) $\sqrt{1-t^2}$.
Substitution: $t = \sin u$ (oder $t = \cos u$), $dt = \cos u\, du$, $1 - t^2 = \cos^2 u$.

$$\begin{aligned}\int \ldots &= \int \tilde{R}(\sin u, \cos u) \cdot \cos u\, du \\ &= \int \hat{R}(\sin u, \cos u) = \cdots\end{aligned}$$

Am Beispiel:

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \int \cos^2 u\, du = \cdots$$

5.5 Uneigentliche Integrale

5.5.1 Definition

Sei I ein Intervall mit den Endpunkten a und b, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *lokal integrierbar*, wenn sie über jedes Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq I$ integrierbar ist. f heißt *uneigentlich integrierbar* über I, wenn

$$\lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^c f(x)\, dx + \lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx$$

für beliebiges $c \in I$ existiert. $\int_a^b f(x)\, dx$ ist dann das uneigentliche Integral von f über I. Man sagt auch $\int_a^b f(x)\, dx$ konvergiert (sonst: divergiert).

5.5.2 Bemerkungen

(1) Ist $I = [a, b]$ und f auf I lokal integrierbar, dann ist f integrierbar über $[a, b]$, insbesondere ist $|f(x)| \leq M$ in $[a, b]$.

Für $a < \alpha < c$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^\alpha f(x)\,dx\right| \\ &\leq (\alpha - a)M \\ &\to 0 \text{ für } \alpha \to a\end{aligned}$$

d. h. das uneigentliche Integral ist gleich dem Riemann-Integral.

(2) Die Sätze beziehen sich meist auf $[a, b)$. Genauso gelten sie für $(a, b]$ und (a, b).

(3) Ist f uneigentlich integrierbar über $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$, so heißt f uneigentlich integrierbar über (a_0, a_n) mit

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\,dx.$$

5.5.3 Beispiele

(1) $[a, b) = [0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^\beta \\ &= \lim_{\beta\to\infty} (1 - e^{-\beta}) = 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\alpha\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1 \\ &= \lim_{\alpha\to 0} 2 - 2\sqrt{\alpha} = 2\end{aligned}$$

(3)

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \log x\Big|_\alpha^1 = -\log\alpha \to \infty \text{ für } \alpha \to 0$$

divergiert.

(4)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \text{ divergiert.}$$

(5) Für welche c ist

$$\int_0^1 x^{-c}$$

konvergent? Sei zuerst $c \geq 1$. Dann ist $x^{-c} \geq x^{-1}$ in $(0,1]$ $\Rightarrow$ Divergenz für $c \geq 1$. Sei nun $c < 1$:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^1 x^{-c}\,dx &= \left.\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right|_\alpha^1 \\ &= \frac{1}{1-c}(1-\alpha^{1-c}) \to \frac{1}{1-c} \text{ für } \alpha \to 0 \end{aligned}$$

(6) Aufgabe: Für welche c ist folgendes Integral konvergent:

$$\int_1^\infty x^{-c}\,dx$$

5.5.4 Cauchykriterium

$\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert genau dann in $I = [a,b)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein β_0 gibt mit

$$|F(\beta') - F(\beta)| = \left|\int_\beta^{\beta'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

für $\beta_0 < \beta < \beta' < b$.

Beweis: Setze $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für $a \leq x < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ existiert} \iff \lim_{x\to b} F(x) \text{ existiert}$$

Dann Cauchykriterium für Grenzwerte.

5.5.5 Dirichletkriterium

f sei stetig differenzierbar in $[a,\infty)$ mit $f' \leq 0$ und $f(x) \to 0$. g sei stetig in $[a,\infty)$ und $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt \leq M$. Dann konvergiert

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Beweis:

$$\int_\beta^{\beta'} f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x)\Big|_\beta^{\beta'} - \int_\beta^{\beta'} f'(x)G(x)\,dx$$
$$= f(\beta')G(\beta') - f(\beta)G(\beta) - \int_\beta^{\beta'} f'(x)G(x)\,dx$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein β_0 mit $0 \le f(x) < \varepsilon$ für $x \ge \beta_0$. Es ist auch $|G(x)| \le M$ für alle $x \ge a$.
Sei nun $\beta_0 < \beta < \beta'$:

$$\begin{aligned}\int_\beta^{\beta'} f(x)g(x)\,dx &\le 2\varepsilon \cdot M + \int_\beta^{\beta'} (-f'(x)) \cdot M\,dx \\ &= 2M\varepsilon + M(f(\beta) - f(\beta')) \\ &< 4M\varepsilon\end{aligned}$$

Mit dem Cauchykriterium folgt dann die Konvergenz des Integrals.

5.5.6 Beispiele

(1) Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert.

Es ist $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$, also existiert $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Zeige nun, daß das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x} \sin x\,dx$ existiert:

Setze $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \sin x$. Es ist dann

$$|G(x)| = \left| \int_1^x \sin t\,dt \right| = |\cos 1 - \cos x| \le 2$$

und $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ mit $f' \le 0$.
Also existiert das Integral nach Dirichlet.

(2) Das Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergiert.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &\ge \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \sin x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi(n+1)}\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \le \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$
$$\to \infty \text{ für } N \to \infty$$

Also divergiert das Integral.

5.5.7 Definition: Absolute Konvergenz

Ist f lokal integrierbar in I und konvergiert $\int_a^b |f(x)|\,dx$, dann heißt f *absolut integrierbar* und $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt dann absolut konvergent.

Bemerkung: Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz des Integrals: Für $\varepsilon > 0$ und $\beta_0 < \beta < \beta' < b$ ist

$$\left|\int_{\beta}^{\beta'} f(x)\,dx\right| \le \int_{\beta}^{\beta'} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

5.5.8 Majorantenkriterium

Ist f lokal integrierbar über I, gilt $|f(x)| \le g(x)$ in I und ist $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent, so ist auch $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent.

Beweis: „bei b“: Für $\beta_0 < \beta < \beta' < b$ ist

$$\left|\int_{\beta}^{\beta'} f(x)\,dx\right| \le \int \beta^{\beta'} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

5.5.9 Nützliche Majoranten

$[1,\infty)$: $x^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$

$[2,\infty)$: $\frac{1}{x}](\log x)^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$

$[3,\infty)$: $\frac{1}{x}\frac{1}{\log x}\frac{1}{(\log(\log x))^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$

$(0,1]$: $x^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

$(0,\frac{1}{2}]$: $\frac{1}{x}|\log x|^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

$(0,\frac{1}{3}]$: $\frac{1}{x}\frac{1}{|\log x|}|\log(\log x)|^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

Beweis: für $\frac{1}{x}(\log x)^{-\alpha}$. Es ist

$$\int\limits_2^b \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \left| \begin{matrix} \text{Subst.:} \\ x = e^t \\ dx = e^t\,dt \end{matrix} \right| = \int\limits_{\log 2}^{\log b} \frac{dt}{t^\alpha}$$

für $b \to \infty$ ist dann

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int\limits_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Dieses Integral existiert, da $\alpha > 1$ ist (es existiert nicht für $\alpha \leq 1$).

5.5.10 Satz über die majorisierte Konvergenz

f_n sei uneigentlich integrierbar über I, $|f_n(x)| \leq g(x)$ in I für alle n und $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ existiere. Außerdem konvergiere f_n gleichmäßig gegen f in jedem $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Dann ist f absolut integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis: f ist absolut integrierbar, da f über jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist und $|f(x)| \leq g(x)$ ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\alpha > a$ und $\beta < b$ so, daß

$$\int\limits_a^\alpha g(x)\,dx + \int\limits_\beta^b g(x)\,dx < \varepsilon$$

ist. Wähle n_0 so, daß für $n \geq n_0$ und $\alpha \leq x \leq \beta$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$$

ist. Dies ist möglich, da gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Zusammen ist dann

$$\left| \int\limits_a^b f(x) - f_n(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^\alpha 2g(x)\,dx + \int\limits_\beta^b 2g(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\,dx$$
$$< 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \text{ für } n \geq n_0$$

5.5.11 Beispiel: Die Gammafunktion

(Benannt nach J. B. Gamma, 1743-1807)

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

(1) Γ ist definiert und stetig in $0 < x < \infty$.

(2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

(1) Sei $x > 0$ fest. Dann ist $e^{-t}t^{x-1}$ stetig bzgl. $t \in (0, \infty)$ und lokal integrierbar in $(0, \infty)$. Es ist

$$e^{-t}t^{x-1} \le \left\{ \begin{array}{ll} t^{x-1} & \text{für } 0 < t \le 1 \\ e^{-t}t^{x-1} & \text{für } t \ge 1 \end{array} \right\} = g(t).$$

g ist eine konvergente Majorante, denn es ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ existiert für } \alpha < 1,\ \alpha = 1 - x < 1$$

und

$$\underbrace{\frac{t^{x-1+2}}{e^t}}_{\le C \text{ für } t \ge t_0} \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

Also ist $e^{-t}t^{x-1} \le C/t^2$ für $t \ge t_0$.

Stetigkeit im Punkt $x_0 > 0$:
Zeige, daß aus $x_n \to x_0$ die Aussage $\Gamma(x_n) \to \Gamma(x_0)$ folgt.
Wähle $x_0, x_n \in [a, b] \subseteq (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_n) - \Gamma(x_0) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x_n-1}\,dt - \int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}\,dt \\ &\overset{?}{\to} 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

Gilt hier also

$$\int_0^\infty f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty f(t)\,dt?$$

Sei $t > 0$ und setze $\varphi(x) = e^{-t}t^{x-1}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| &= |x_n - x_0| \cdot |\varphi'(\xi_n)| \\ &\le |x_n - x_0| \cdot C \text{ für alle } t \in [\alpha, \beta], \end{aligned}$$

denn es ist

$$\varphi'(x) = e^{-t}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}e^{x\log t} = e^{-t}\frac{1}{t}\log t \cdot t^x,$$

also

$$|\varphi'(x)| \le \begin{cases} 1\frac{1}{\alpha}|\log\alpha| & \text{für } \alpha \le t < 1 \\ e^{-1}(\log\beta)\beta^b & \text{für } 1 \le t \le \beta \end{cases}$$

Setze dann

$$C = \max\left(\frac{|\log\alpha|}{\alpha}, \frac{(\log\beta)\beta^b}{e}\right).$$

Damit ist dann für $a \le x_0, x_n \le b$ und $a \le \xi_n \le b$:

$$|e^{-t}t^{x_n-1} - e^{-t}t^{x_0-1}| \le C \cdot \underbrace{|x_n - x_0|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } n \to \infty}} \text{ für } \alpha \le t \le \beta$$

Also konvergiert $e^{-t}t^{x_n-1}$ gleichmäßig in $\alpha \leq t \leq \beta$ für $n \to \infty$ gegen $e^{-t}t^{x-1}$.
Suche nun eine Majorante $g(t)$ für $f_n(t)$:

$$\begin{aligned} f_n(t) = e^{-t}t^{x_n-1} &= \begin{cases} t^{a-1} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{für } t > 1 \end{cases} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Das Integral $\int\limits_0^\infty g(x)\,dt$ konvergiert. Für die Stetigkeit nun: Majorisierte Konvergenz.

(2) Es ist

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$$

und

$$\begin{aligned} \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^x\,dt &= -e^{-t}t^x\Big|_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}xt^{x-1}\,dt \\ &= e^{-\alpha}\alpha^x - e^{-\beta}\beta^x + x\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^{x-1}\,dt \\ &\to x\Gamma(x) \text{ für } \alpha \to 0 \text{ und } \beta \to 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Induktionsanfang: $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$
Induktionsschluß: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$

5.5.12 Integralkriterium für Reihen

Sei $f\colon [p,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann konvergieren bzw. divergieren

$$\sum_{n=p}^\infty f(n) \text{ und } \int\limits_p^\infty f(x)\,dx$$

gleichzeitig.
Im Konvergenzfall gilt:

$$\sum_{n=p+1}^\infty f(n) \leq \int\limits_p^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=p}^\infty f(n)$$

Anwendungsbeispiele:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$
$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

konvergieren für $\alpha > 1$.

Beweis: Sei $n \leq x \leq n+1$. Dann ist $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ und

$$f(n+1) \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \text{ für } n = p, \ldots, p+1, \ldots, N$$

und

$$\sum_{n=p+1}^{N+1} f(n) = \sum_{n=p}^{N} f(n+1) \leq \int\limits_p^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=p}^{N} f(n).$$

Sei nun die Reihe konvergent. Dann ist

$$\sum_{n=p}^{N} f(n) \leq C \text{ für alle } N$$

$$\Rightarrow \int\limits_p^N f(x)\,dx \leq C \text{ für alle } N \;\Rightarrow \int\limits_p^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Sei andersherum das Integral konvergent. Dann ist

$$\int\limits_p^N f(x)\,dx \leq C \text{ für alle N,}$$

und es folgt

$$\sum_{n=p+1}^{N} f(x) \leq C \text{ für alle } N \;\Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert.}$$

6 Komplexe Zahlen und Funktionen[1]

6.1 Komplexe Zahlen

6.1.1 Einführung

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Auf den komplexen Zahlen werden eine Addition

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

und eine Multiplikation

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

definiert.

$$\mathbb{C} := \{x + iy \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

bildet mit dieser Addition und Multiplikation einen Körper. $\mathbb{R}^* = \{x + i \cdot 0 \colon x \in \mathbb{R}\}$ wird identifiziert mit $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto x + i \cdot 0 \end{cases}$$

ist bijektiv. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus für $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ und ein Holomorphismus für $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\mathbb{R} = \{x + i \cdot 0 \colon x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

6.1.2 Bezeichnungen

Sei $z = x + i \cdot y$. Dann heißt $\operatorname{Re} z = x$ *Realteil* und $\operatorname{Im} z = y$ *Imaginärteil* von z. $\bar{z} = x - iy$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu z. Es gilt dabei $\overline{\overline{z}} = z$ und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ bzw. } \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Bei Addition und Multiplikation ist

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ bzw. } \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Für $z \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

insbesondere ist

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{1} = -i.$$

Bei der Division gilt für $w \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

[1]Version 4.7 vom 19. Dezember 2002

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt *Betrag* von z (Abstand zwischen z und 0. Für reelles $z = x$ ist $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ der reelle Betrag. Für den Betrag gilt:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ und } |i| = 1$$

Es ist

$$|-z| = |z| = |i \cdot z| = |\bar{z}|, \ |\operatorname{Re} z| \leq |z| \text{ und } |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

6.1.3 Dreiecksungleichung

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Dreiecksungleichung (vgl. 1.4.2 auf Seite 9):

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Gleichheit genau dann, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder $w = \lambda z$ mit $\lambda > 0$. Auch die umgekerhrte Dreiecksungleichung gilt:

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Beweis: Zuerst für die Dreiecksungleichung. Es ist

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Also ist $|z + w| \leq |z| + |w|$. Nun die umgekehrte Dreiecksungleichung:
Es ist $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, also $|z| - |w| \leq |z - w|$. Genauso wird $|w| - |z| \leq |w - z|$ gezeigt. Zusammen ist dann $||w| - |z|| \leq |w - z|$.
Jetzt der Beweis für die Gleichheitskriterien:

1. Für $z = 0$ oder $w = 0$ klar.
2. Seien nun $z, w \neq 0$: Es ist dann

$$\begin{aligned}
„=“ &\iff \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z| \cdot |w| = |z\bar{w}| \\
&\iff z\bar{w} \in \mathbb{R} > 0 \iff \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} > 0 \\
&\iff \frac{z}{w} > 0 \iff \frac{z}{w} = \frac{1}{\lambda} \text{ mit } \lambda > 0 \\
&\iff w = \lambda z \text{ mit } \lambda > 0
\end{aligned}$$

6.2 Folgen und Reihen

6.2.1 Definition: Komplexe Folge

Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto c_n$ heißt (*komplexe*) *Folge*: (c_n). (c_n) heißt konvergent gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n - c| = 0$ ist. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ oder $c_n \to c$ für $n \to \infty$. Vergleiche auch 2.1.1 auf Seite 19.

Bemerkung: Sei $c_n = a_n + ib_n$ und $c = a + ib$ mit $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} |a_n - a| \leq |c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ |b_n - b| \leq |c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \end{aligned}$$

Es gilt also: $c_n \to c \iff a_n \to 0,\, b_n \to b$.

6.2.2 Beispiel

$$\begin{aligned} c_n = \frac{n+i}{1-2ni} &= \frac{n+i}{1-2ni} \cdot \frac{1+2ni}{1+2ni} \\ &= \frac{n - 2n + i(1+2n^2)}{1+4n^2} = \frac{-n}{1+4n^2} + i\frac{2n^2}{1+4n^2} \to \frac{i}{2} \\ c_n &= \frac{1+\frac{i}{n}}{\frac{1}{n} - 2i} \xrightarrow{\text{Regeln}} \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

6.2.3 Vererbung der Grenzwertregeln

Alle Regeln für Grenzwerte von reellen Folgen gelten für komplexe Folgen weiter. Ausgeschlossen sind diejenigen, die auf der Anordnung der reellen Zahlen beruhen (Es gibt keine Anordnung unter den komplexen Zahlen).

Beispiel: Gelte $c_n \to c$, $d_n \to d$. Dann ist

$$|(c_n + c_n) - (c + d)| = |c_n - c + d_n - d| \leq |c_n - c| + |d_n - d| \to 0.$$

6.2.4 Definition: Komplexe Reihe

Sei (c_n) eine komplexe Folge und $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k$. Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt konvergent, wenn die Folge (s_k) konvergiert. Es ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Bemerkung: Sei $c_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann ist $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + i \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Also ist $\sum c_n$ genau dann konvergent, wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent sind. Es ist $\sum c_n = \sum a_n + i \sum b_n$.

6.2.5 Beispiel: Die geometrische Reihe

Was ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n$? Reeller Versuch: Sei $c^n = c_n = a_n + ib_n$ und $c = a + ib$:

$$\begin{aligned} c_1 &= a + ib \\ c_2 &= (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \\ c_3 &= (a+ib)^3 = a3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 = a3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) \end{aligned}$$

Nun ein komplexer Versuch: Es ist

$$s_n = 1 + c + \cdots + c^n = 1 + c(s_n - c^n).$$

Für $c = 1$ ist $s_n = n + 1$. Für $c \neq 1$ ist

$$s_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} \to \frac{1}{1 - c} \text{ falls } |c| < 1.$$

Für $|c| \geq 1$ ist die Reihe divergent (selber machen).

6.2.6 Cauchykriterium

Eine komplexe Folge (c_n) bzw. Reihe $\sum\limits_n c_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $|c_n - c_m| < \varepsilon$ bzw. $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k\right| < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$ (Vergleiche mit 2.3.4, Seite 26, und 2.4.6, Seite 31). Dies bedeutet, daß $\mathbb{C}$ vollständig ist.

Beweis: Aufgabe (Zerlegung in Re- und Im-Teil).

6.2.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte (d. h. $|c_n| \leq K$ für alle n) Folge (c_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (vergleiche mit 2.3.3 auf Seite 26).

Beweis: Sei $c_n = a_n + ib_n$ mit $|a_n|, |b_n| \leq |c_n| \leq K$. Dann besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) und (b_{n_k}) besitzt eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_j}})$. Zusammen konvergiert dann $c_{n_{k_j}} = a_{n_{k_j}} + b_{n_{k_j}}$.

6.2.8 Dirichletkriterium

Sei (λ_n) eine reelle monotone Nullfolge und (c_n) eine komplexe Folge mit beschränkten Partialsummen $\left(\left|\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\right| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right)$.
Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n$ (siehe 2.4.9 auf Seite 32).

Beweis: Sei $c_n = a_n + ib_n$. Dann ist $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$ und $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right| \leq M$, also ist $\sum\limits_k \lambda_k a_k + i \sum\limits_k \lambda_k b_k$ konvergent.

6.2.9 Definition: Absolute Konvergenz

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert (s. 2.5.1, Seite 34).

Bemerkung: Es ist $|a_n| \leq |c_n|$, $|b_n| \leq |c_n|$ und $|c_n| \leq |a_n| + |b_n|$.
$\sum c_n$ ist absolut konvergent $\iff$ $\sum a_n$ und $\sum b_n$ sind absolut konvergent.

6.2.10 Regeln

(1) Absolut konvergente Reihen sind konvergent (vgl. 2.5.2 auf Seite 34).

(2) Absolut konvergente Reihen dar man beliebig umordnen, ohne an der Konvergenz oder am Reihenwert etwas zu ändern (siehe 2.6.4 auf Seite 40).

(3) Cauchyprodukt: Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent ($a_n, b_n \in \mathbb{C}$), so gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dabei konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ absolut (vgl. 2.6.10, Seite 44).

(4) Majorantenkriterium: Ist $|c_n| \leq \lambda_n$ für alle n und konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vgl. 2.5.3, Seite 35).

(5) Wurzelkriterium: Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vergleiche mit 2.5.4, Seite 35).

(6) Quotientenkriterium: Sind alle $c_n \neq 0$ und ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1,$$

so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vgl. 2.5.5, Seite 36).

6.2.11 Beispiele

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert absolut für $|c| < 1$.
Beweis mit Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{|c|^n} = |c|$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dies ist für $z = 0$ klar.
Für $z \neq 0$: Quotientenkriterium

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(3) Cauchyprodukt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n! z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}}_{=(z+w)^n} \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

6.3 Konvergenz und Stetigkeit

6.3.1 Definition: Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ (vgl. 3.2.1, Seite 50). Geometrische Deutung von $|z - z_0| < \delta$: Kreisscheibe um z_0 mit dem Radius δ.

Bemerkung: Sei $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ und $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für $z \in D$. Es ist $u, v\colon D \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$f = u + iv \text{ ist stetig in } z_0 \iff u, v \text{ sind stetig in } z_0 \in D$$

6.3.2 Beispiel

Sei $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Es ist

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)(z + z_0)|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle dazu $0 < \delta < 1$ so, daß $\delta \cdot (2|z_0| + 1) < \varepsilon$ ist. Aus $|z - z_0| < \delta$ folgt dann

$$|z| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Damit ist dann

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \cdot (|z| + |z_0|) < \delta \cdot (1 + 2|z_0|) < \varepsilon.$$

Bemerkung: Die Regeln für stetige Funktionen $D \to \mathbb{C}$ gelten wie für reelle Funktionen $I \to \mathbb{R}$.

6.3.3 Definition: Gleichmäßige Konvergenz

Sei $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Die Folge (f_n) bzw. die Reihe $\sum\limits_n f_n$ heißt gleichmäßig konvergent in D gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } z \in D$$

bzw.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } z \in D$$

(vergleiche auch 3.3.1, Seite 54).

Bemerkung: Sei $f_n = u_n + iv_n$ und $f = u + iv$. Dann gilt

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig in } D \iff u_n \to u \text{ und } v_n \to v \text{ gleichmäßig in } D.$$

6.3.4 Satz

Konvergieren die f_n gleichmäßig gegen f in D, und sind alle f_n stetig in $z_0 \in D$, dann ist auch f stetig in D (siehe auch 3.3.4, Seite 56).

Beweis: Wie in $\mathbb{R}$.

6.3.5 Definition: Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{6.1}$$

heißt *Potenzreihe* mit dem Mittelpunkt (Entwicklungspunkt) z_0. (c_n) heißt Koeffizientenfolge. Es sind $z_0, c_n \in \mathbb{C}$. Für den Konvergenzradius r gilt

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

(6.1) konvergiert für $|z - z_0| < r$ und divergiert für $|z - z_0| > r$. Sonderfälle sind:

(a) $r = 0$: Nur Konvergenz in z_0, „nirgends".

(b) $r = \infty$: Überall konvergent.

(c) $0 < r < \infty$: Für $|z - z_0| = r$ ist keine Aussage möglich.

(d) Ist $r > 0$, so ist (6.1) gleichmäßig konvergent in $|z - z_0| > r$.

Siehe auch 3.4.1 und 3.4.2 ab Seite 58.

Beweise: Wie in $\mathbb{R}$.

6.3.6 Die Exponentialfunktion

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Die Exponentialfunktion ist definiert und stetig in $\mathbb{C}$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$. Außerdem ist $e^z \neq 0$ in $\mathbb{C}$, da für $w = -z$ gilt: $1 = e^z \cdot e^{-z}$ (siehe auch 3.5.1 und 3.5.2 ab Seite 65).

6.3.7 Eulersche Formel

Für $t \in \mathbb{R}$ gelten die Formeln:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\cos t + i \sin t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0} \infty \frac{(it)^n}{n!} = e^{it}\end{aligned}$$

6.3.8 Bemerkungen

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \cdot (1+0) = e^z$$

Die Exponentialfunktion ist $2\pi i$-periodisch. Es gilt

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

6.3.9 Additionstheoreme von Sinus und Cosinus

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \text{ und } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

und damit ist

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta + i(\cos\varphi \cdot \sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) \\ e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= e^{i(\varphi+\theta)} = \cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta) \end{aligned}$$

Es folgen dann die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta &= \cos(\varphi+\theta) \\ \cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta &= \sin(\varphi+\theta) \end{aligned}$$

6.3.10 Polarkoordinaten

Einführung: Es gilt:

$$\begin{aligned} |e^{it}|^2 = |\cos t + i \sin t|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \Rightarrow |e^{it}| = 1 \text{ für } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Satz: Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ läßt sich schreiben als

$$z = |z| \cdot e^{i\theta} \text{ mit } \theta \in \mathbb{R}.$$

θ ist dabei eindeutig bestimmt, wenn man sich z. B. auf $0 \leq \theta < 2\pi$ oder $-\pi < \theta < \pi$ beschränkt. θ heißt auch *Argument* von z: $\theta = \arg z$.

Beweis: Sei $|z| = 1$, $z \neq -1, 1$. Schreibe $z = x + iy$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \neq 0$. Es existieren genau zwei Stellen $\theta_1 \in (0, \pi)$ und $\theta_2 \in (\pi, 2\pi)$ mit

$$\theta_2 = 2\pi - 1\theta_1, \quad \sin\theta_1 = -\sin\theta_2.$$

Es gilt:

$$|y| = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_j} = |\sin\theta_j|$$

Setze nun $\theta = \theta_1$ für $y > 0$ und $\theta = \theta_2$ für $y < 0$. Es gilt dann $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$. Andere θ's gibt es nicht.
Für $z = -1$ ($\theta = \pi$) und $z = 1$ ($\theta = 0$) ist θ eindeutig bestimmt.
Sei nun $|z| \neq 1$ und $z \neq 0$. Es ist $z = |z| \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{|...|=1} = |z| \cdot e^{i\theta}$.

6.3.11 Potenzen

Für $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ ist $z^2 = |z| \cdot |z| \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} = |z|^2 e^{2i\theta}$ und $z^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Beweis: Per Induktion (selber machen).

6.3.12 Wurzeln

Problem: Sei $a = |a|e^{i\alpha}$ $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ gegeben und $z^n = a$. Gesucht ist z. Falls $a = 0$ ist $z = 0$. Sonst wird der Ansatz $z = r \cdot e^{i\theta}$ gemacht:

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff r^n e^{in\theta} = |a|e^{i\alpha} \\ &\iff r^n = a \text{ und } n\theta = \alpha + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = \sqrt[n]{|a|} \text{ und } \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \Rightarrow z_k^n = a \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

und $z_{k+n} = z_k$ (dies ist selber zu beweisen).

Zusammenfassung: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus 0$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich

$$\sqrt[n]{a} = z_k = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Bemerkung: Es ist $\arg z_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$ und $\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{2\pi}{n}$. Die Wurzeln liegen also gleichmäßig auf dem Vollkreis verteilt.

6.3.13 Polynome

Das Polynom $z^n - a$ mit festem $a \in \mathbb{C}$ hat die n Nullstellen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ für $a \neq 0$, bzw. $0, \ldots, 0$ für $a = 0$.

6.3.14 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(n \geq 1,\ a_n \neq 0,\ a_\nu \in \mathbb{C})$ besitzt (mindestens) eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.

Beweis: (nach Gauß) Sei $|z| = r \geq r_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n + (a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \geq |a_n|r^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| r^\nu \\ &= r^n \cdot \left(|a_n| - \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \frac{1}{r^{n-\nu}}\right) > |P(0)| \text{ für } r \geq r_0 \ (r_0 \text{ hinreichend groß}) \end{aligned}$$

Das heißt, daß die Nullstelle immer betragsmäßig kleiner als ein r_0 sein muß. Außerdem ist $|P(z)| > |P(0)|$ für betragsmäßig hinreichend großes z.
Annahme: Es ist $P(z) \neq 0$ in $\mathbb{C}$. Setze

$$m = \inf\{|P(z)| \colon |z| < r_0\}$$

Es existieren dann z_k mit $|z_k| < r_0$ und $|P(z_k)| \to m$.
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß sei z_k OBdA konvergent gegen z_0:

$$m \leftarrow |P(z_k)| \to |P(z_0)|$$

Es ist also $m = P(z_0)$ und aus der Stetigkeit folgt $m \leq |P(0)|$. Für großes $z \in \mathbb{C}$ ist dann also

$$|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_0)| \geq m$$

Jetzt ist noch $P(z_0) = 0$ zu zeigen.
Annahme: Es ist $P(z_0) \neq 0$. Setze dann

$$Q(z) = \frac{P(z_0 + z)}{P(z_0)}.$$

Es ist $|Q(z)| \geq |Q(0)| = 1$.
Sei nun $z = re^{i\theta}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $r > 0$.
Außerdem sei $Q(z) = 1 + b_s z^s + \cdots + b_n z^n$ mit $b_s \neq 0$. Dann ist

$$1 \leq |Q(z)|^2 = \left|1 + b_s r^s e^{is\theta} + \cdots + b_n r^n e^{in\theta}\right|^2$$

(es ist $|a+b|^2 = |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}b) + |b|^2$)

$$\begin{aligned} &= 1 + 2\,\mathrm{Re}(b_s r^s e^{is\theta} + \cdots) + \left|b_s r^s e^{is\theta} + \cdots\right|^2 \\ &= 1 + 2 \cdot |b_s| \cdot r^s \cdot |b_s| \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^t \text{ mit } t > s. \end{aligned}$$

Also ist

$$0 \leq 2|b_s| r^s \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^t \text{ mit } t > s.$$

Dividiere jetzt durch r^s. Dann ist

$$0 \leq 2|b_s| \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^{t-s} \text{ mit } t > s.$$

Für $r \to 0$ ist dann

$$0 \leq 2|b_s| \cos(s\theta + \beta_s) \text{ für } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Also ist $\cos(s\theta + \beta_s) \geq 0$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und festes $s \in \mathbb{N}$. Wenn man nun $\theta = \frac{\pi - \beta_s}{s}$ setzt, dann ist aber $\cos(s\theta + \beta_s) = \cos\pi = -1$. Widerspruch!

6.3.15 Folgerungen

1. $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ kann man schreiben als

   $$P(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \ldots (z - z_n) = a_n(z - \zeta_1)^{r_1} \ldots (z - \zeta_s)^{r_s}$$

   mit $r_1 + \cdots + r_s = n$ und paarweise verschiedenen ζ_i.

Beweis: Es gibt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_1) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(z) = P(z) - (z_1) &= \sum_{j=1}^{n} a_j(z^j - z_1^j) = (z - z_1) \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j(z^{j-1} + \cdots + z_1^{j-1}) \\ &= (z - z_1) \cdot P_1(z) \end{aligned}$$

Folgere nun weiter mit Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.
$n - 1 \mapsto n$: Es ist $P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z)$ und $\operatorname{grad} P_1 = n - 1$.
Dann ist $P_1(z) = a_n \underbrace{(z - z_2) \ldots (z - z_n)}_{n-1 \text{ Stück}}$.

Spezialfall: $P(z) = a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n$ heißt reell, wenn $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind. Ist P reell und $P(z_0) = 0$ für $z_0 \notin \mathbb{R}$, dann gilt

$$P(\overline{z_0}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{z_0}^j = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j z_0^j} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z_0^j} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Die zu z_0 konjugierte Zahl ist für reelles P also auch Nullstelle.

2. Ist $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ reell, so gilt

$$P(z) = a_n(z - \xi_1)^{r_1} \ldots (z - \xi_k)^{r_k}(z^2 - 2c_1 z + b_1)^{s_1} \ldots (z^2 - 2c_\ell z + b_\ell)^{s_\ell}$$

mit $(b_j - c_j^2) > 0$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ und $c_j, b_j \in \mathbb{R}$.
Beweis: P hat die Nullstellen $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}$, paarweise verschieden, und $\zeta_1, \overline{\zeta_1}, \ldots, \zeta_\ell, \overline{\zeta_\ell}$, jeweils konjugiert komplex und paarweise verschieden:

$$\begin{aligned} P(z) =& a_n(z - \xi_1)^{r_1} \ldots (z - \xi_k)^{r_k} \\ & \cdot ((z - \zeta_1)(z - \overline{\zeta_1}))^{s_1} \ldots ((z - \zeta_\ell)(z - \overline{\zeta_e ll}))^{s_\ell} \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$(z - \zeta_1)(z - \overline{\zeta_1}) = z^2 - z\overline{\zeta_1} - z\zeta_1 + \zeta_1\overline{\zeta_1} = z^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta_1)z + |\zeta_1|^2$$

$$b_1 - c_1^2 = |\zeta_1|^2 - (\operatorname{Re}\zeta_1)^2 = (\operatorname{Im}\zeta_1)^2 > 0$$

6.3.16 Satz über die Partialbruchzerlegung

Sind P und Q reelle Polynome ohne gemeinsame Nullstellen mit $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$ und

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \xi_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j}.$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j}$ und $\gamma_{\nu j}$ mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{r_j-1} \frac{a_{\nu j}}{(x - \xi_j)^{r_j-\nu}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{s_j-1} \frac{\beta_{\nu j} x + \gamma_{\nu j}}{(x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j-\nu}}.$$

Beweis: (von Redheffer) In den nächsten Abschnitten.

6.3.17 Hilfssatz 1

Seien P, Q und R Polynome mit den Graden p, q und r, wobei $r < p + q$ ist. Außerdem haben P und Q keine gemeinsamen Nullstellen. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome A und B mit $\operatorname{grad}(A) < q$, $\operatorname{grad}(B) < p$ und $AP + BQ = R$.

Beweis: Die Koeffizienten von P, Q und R seien c_j, d_j und e_j ($c_j = 0$ für $j > p$, $d_j = 0$ für $j > q$ und $e_j = 0$ für $j > r$). Die gesuchten Polynome A und B haben die Koeffizienten a_j und b_j ($a_j = 0$ für $j \geq q$ und $b_j = 0$ für $j \geq p$).
$AP + BQ = R$ ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{k} c_{k-j} a_j + \sum_{j=0}^{k} d_{k-j} b_j = e_k \tag{6.2}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots, p + q - 1$. Dies sind $p + q$ lineare Gleichungen mit den $p + q$ Unbekannten a_j ($0 \leq j < q$) und b_j ($0 \leq j < p$). Ist es eindeutig lösbar?
LinA: Ein LGS $Ax = b$ ist eind. lösbar $\Longleftrightarrow$ $Ax = 0$ hat nur die Triviale Lösung $x = 0$.
Mache nun (6.2) homogen (setze $e_k = 0$ für alle k, d. h. $R = 0$). Hat nun $AP + BQ = 0$ nur die Lösung $A = B = 0$?
Sei A, B Lösung: Ist $Q(z_1) = 0$, dann ist $P(z_1) \neq 0$ und damit ist dann $A(z_1) = 0$. Da Q aber q Nullstellen und hat, A aber weniger als $q - 1$ Nullstellen hat, ergibt sich ein Widerspruch. Also muß $A = 0$ und damit auch $B = 0$ sein.

6.3.18 Hilfssatz 2

Seien P, $Q_1, \ldots, Q_m$ Polynome, je zwei ohne gemeinsame Nullstellen, $Q = Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_m$ und $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $P_1, \ldots, P_m$ mit $\operatorname{grad}(P_j) < \operatorname{grad}(Q_j)$ und

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j}{Q_j}.$$

Beweis: Mit Induktion nach m.

$m = 1$: ($Q = Q_1$):

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \;\Rightarrow\; P_1 = P$$

$m - 1 \mapsto m$: Wende Hilfssatz 1 (6.3.17) an auf:

$$AQ_m + B(Q_1 \ldots Q_{m-1}) = P.$$

Die Voraussetzungen für den Hilfssatz sind: Q_m und $Q_1 \ldots Q_{m-1}$ haben keine gemeinsame Nullstelle (nach Voraussetzung schon gegeben). Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q_1 \ldots Q_m) &= \left(\sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{grad}(Q_j)\right) + \operatorname{grad}(Q_m) \\ &= \operatorname{grad}(Q_1 \ldots Q_{m-1}) + \operatorname{grad}(Q_m)\end{aligned}$$

Aus dem Hilfssatz 1 ergibt sich dann A mit $\mathrm{grad}(A) < \mathrm{grad}(Q_1 \dots Q_{m-1})$ und B mit $\mathrm{grad}(B) < \mathrm{grad}(Q_m)$. Setze $P_m := B$. Dann ist $\mathrm{grad}(P_m) < \mathrm{grad}(Q_m)$. Es gilt damit

$$P = AQ_m + P_m Q_1 \dots Q_{m-1}.$$

Nach Division durch Q ist dann

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{Q_1 \dots Q_{m-1}} + \frac{P_m}{Q_m} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} \frac{P_j}{Q_j}}_{\odot} + \underbrace{\frac{P_m}{Q_m}}_{\oplus} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j}{Q_j}$$

Dabei ist $\odot$ nach Induktionsvoraussetzung und $\oplus$ nach Hilfssatz 1 eindeutig.

6.3.19 Beweis der Partialbruchzerlegung

Sei nun $Q = (H_1)^{r_1} \dots (H_k)^{r_k} \cdot (L_1)^{s_1} \dots (L_\ell)^{s_\ell}$ mit $H_j(x) = (x - \xi_j)$ und $L_j = x^2 - 2c_j x + b_j$. Dann ist $Q_j = (H_j)^{r_j}$ oder $(L_j)^{s_j}$. Mit Hilfssatz 2 gilt dann:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{P_j(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\tilde{P}_j(x)}{(x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j}}$$

Dabei ist $\mathrm{grad}(P_j) < r_j$ und $P_j(x) = \sum_{\nu=0}^{r_j-1} a_{\nu j}(x - \xi_j)^\nu$:

$$\frac{P_j(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}} = \sum_{\nu=0}^{r_j-1} \frac{a_{\nu j}}{(x - \xi_j)^{r_j - \nu}}$$

Damit ist der 1. Teil der Behauptung bewiesen.
Setze $\tilde{P}(x) = \tilde{P}_j(x)$ und $(x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j} = (x^2 - 2cx + b)^s$. Es ist $\mathrm{grad}(\tilde{P} < 2s$. Gilt nun

$$\tilde{P}(x) \stackrel{?}{=} \sum_{\nu=0}^{s-1} (\beta_\nu + \gamma_\nu x)/x^2 - 2cx + b)^\nu$$

Dann wäre nämlich

$$\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 - 2cx + b)^s} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{\beta_\nu + \gamma_\nu x}{(x^2 - 2cx + b)^{s-\nu}}$$

Diese Frage ist Aufgabe für das konkrete Problem $\tilde{P}(x) = 2x + 2x^2 - x^3$ und $x^2 - 2cx + b = x^2 + 1$. Es ist

$$\frac{-x^3 - 2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = (-x + 2) + \frac{3x - 2}{x^2 - 1}$$

Also ist $\tilde{P}(x) = (-x + 2)(x^2 + 1) + 3x - 2$.

6.4 Trigonometrische Reihen

6.4.1 Definition: Trigonometrische Reihe

Eine Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6.3}$$

heißt *trigonometrische Reihe* ($c_k \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$). Sie heißt konvergent im Punkt $t \in \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

existiert.

6.4.2 Bemerkung

(6.3) heißt reell, wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$ für $k = 0, \pm 1, \dots$. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} c_{-k}e^{-ikt} + c_k e^{ikt} &= \overline{c_k}\overline{e^{ikt}} + c_k e^{ikt} = 2\operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) \\ \Rightarrow \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wenn nun $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ ist, folgt $\operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) = \frac{1}{2}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ und mit $c_{-k} = \overline{c_k}$ ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

6.4.3 Beispiel

Sei $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \downarrow 0$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kt \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt \text{ für alle } t \text{ ausgenommen möglicherweise } t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$$

Beweis: Mit dem Dirichletkriterium ($0 < t < 2\pi$). Es ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \begin{matrix} \sin kt \\ \cos kt \end{matrix} \right| \le \left| \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} \right| &= \left| e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right| \le \frac{2}{|1 - e^{it}|} \end{aligned}$$

Die Partialsummen sind beschränkt, also liegt Konvergenz vor.
Die Sinusreihe ist konvergent für $t = 0$ und $\cos(k \cdot 0) = 1$, hier hängt die Konvergenz also von (α_k) ab.

6.4.4 Integration von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ und $f(t) = u(t) + iv(t)$. Wenn $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, so setzt man

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$$

6.4.5 Integrationsregeln

(a)

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

(b)

$$\int_a^b cf(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt \quad (c \in \mathbb{C})$$

(c)

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}$$

(d)

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Beweis: Setze $I = \int\limits_a^b f(t)\,dt$. Die Behauptung ist für $I = 0$ klar.
Sei nun $I \neq 0$ mit $I = |I|e^{i\alpha}$ und $\alpha = \arg(I)$:

$$\begin{aligned} |I| &= \mathrm{Re}(e^{-i\alpha}I) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\int_a^b f(t)\,dt\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\alpha}f(t)\,dt\right) = \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}(e^{-i\alpha}f(t))}_{\leq|e^{-i\alpha}f(t)|=|f(t)|} \end{aligned}$$

(e) f_n konvergiere in $[a,b]$ gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$ und alle f_n seien integrierbar. Dann ist

$$\int_a^b f_n(t) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt.$$

Beweis:

$$\int_a^b u_n(t)\,dt + i\int_a^b v_n(t)\,dt \to \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

6.4.6 Beispiel

Sei $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = f(t)$ gleichmäßig konvergent. Dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}f(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)t}\,dt.$$

Für $\ell \in \mathbb{Z}$ ist dabei

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \ell = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t}\,dt = \left.\frac{e^{i\ell t}}{i\ell}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i\ell}(e^{i\pi\ell} - e^{-i\pi\ell}) = 0$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t)\,dt = 2\pi c_m.$$

Also ist

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t)\,dt.$$

6.5 Fourierreihen

Alle Funktionen in diesem Abschnitt sind vom Typ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und sind 2π-periodisch, d. h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem sei f integrierbar über $[-\pi, \pi]$, also über beliebige $[a, b]$.

6.5.1 Definition

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

heißt k-ter *Fourierkoeffizient* von f ($k \in \mathbb{Z}$). Die Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$ ist die von f erzeugte *Fourierreihe*:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt} \tag{6.4}$$

6.5.2 Bemerkung

Es ist $\hat{f}_k = \overline{\hat{f}_{-k}}$, d. h. (6.4) ist reell, denn

$$\begin{aligned} \hat{f}_{-k} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}e^{ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)e^{-ikt}}\,dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}} = \overline{\hat{f}_k}. \end{aligned}$$

Setzt man $\hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, so ist

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \text{ für } k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \text{ für } k = 0, 1, \ldots$$

$$a_k = 2\operatorname{Re}\hat{f}_k = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{Re}(e^{-ikt})\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$$

6.5.3 Beispiel

Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } (-\pi, 0] \\ 1 & \text{in } (0, \pi] \end{cases}$$

2π-periodisch fortgesetzt. Es ist $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikt}\,dt$.
Für $k = 0$ ist

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2}$$

und für $k > 0$ ist

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\cdot\left.\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi k}\cdot\frac{1}{-i}(e^{-i\pi k} - 1) = \frac{i}{2k\pi}\cdot\begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit ist $a_0 = 1$ und $a_k = 2\operatorname{Re}\hat{f}_k = 0$.
Es ist $b_k = -2\operatorname{Im}\hat{f}_k = \frac{-1\cdot 2}{2k\pi}\cdot\begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$. Also ist

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}$$

Die Reihe ist überall konvergent nach Dirichlet, insbesondere in $t = 0$ mit dem Wert $\frac{1}{2}$.

6.5.4 Satz

(a) Ist f gerade, so ist $b_k = 0$ und $a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$.

(b) Ist f ungerade, so ist $a_k = 0$ und $b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(s)e^{-iks}\,ds + \int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right] = \left|\begin{matrix}\text{Subst. im 1. Integral}\\ s=-t\\ ds=-dt\end{matrix}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(-t)e^{ikt}\,dt + \int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[f(t)e^{-ikt} \pm f(t)e^{ikt}\right]\,dt
\end{aligned}$$

dabei gilt $+$ für gerades f und $-$ für ungerades f

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\left[e^{-ikt} \pm e^{ikt}\right]\,dt$$

Dabei ist $[\dots] = 2\cos kt$ für gerades f und $= -i2\sin kt$ für ungerades f

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cdot \begin{matrix}\cos kt\\ -i\sin kt\end{matrix}\,dt$$

Wenn f gerade ist, ist also $\hat{f}_k = \frac{1}{2}a_k$ reell. Wenn f ungerade ist, ist also $\hat{f}_k = \frac{-i}{2}b_k$.

6.5.5 Beispiel

Sei $f(t) = |t|$ in $-\pi < t \le \pi$, 2π-periodisch fortgesetzt. f ist gerade, also ist $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \pi$$

und für $k > 0$ ist

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot t\cdot \left.\frac{\sin kt}{k}\right|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\frac{sinkt}{k}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi k\cdot k}\cos kt|_0^\pi = \frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi)-1).
\end{aligned}$$

D. h. $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$ und

$$a_{2k-1} = \frac{2\cdot(-2)}{\pi(2k-1)^2} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}.$$

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$

ist gleichmäßig konvergent nach dem Majorantenkriterium. Später wird gezeigt:

$$f(t) \overset{!}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$

Für $t = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{(2k-1)^2} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.5.6 Besselsche Ungleichung

Es ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt$$

mit $|\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2) = |\hat{f}_k|^2$ gilt:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt.$$

Insbesondere gilt: $\hat{f}_k \to 0$ für $|k| \to \infty$, d. h. $a_k \to 0$ und $b_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Beweis: Sei

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

ein trigonometrisches Polynom, $c_k \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - T(x)|^2 &= (f(x))^2 - 2f(x) \operatorname{Re}(\overline{T(x)}) + |T(x)|^2 \\ &= (f(x))^2 - 2 \operatorname{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} f(x) \overline{c_k} e^{-ikx} \right) + \sum_{k,\ell=-n}^{n} c_k \overline{c_\ell} e^{i(k-\ell)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-T(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx \\ -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx}_{=2\pi\hat{f}_k} \\ +\sum_{k,\ell=-n}^{n} c_k\overline{c_\ell} \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x}\,dx}_{=0\ (\ell\neq k);\ =2\pi\ (\ell=k)} \\ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx - 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n} 2\pi\hat{f}_k\overline{c_k} \\ +2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \le & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-T(x)|^2\,dx \\ = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}_k|^2 \\ & + \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}_k\overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \\ = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}_k|^2 + \underbrace{\sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}_k-c_k|^2}_{\ge 0\ (=0 \text{ für } c_k=\hat{f}_k\forall k)}\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,dt$$

Nun Grenzübergang $n\to\infty$, dann ist die Behauptung beweisen.
Zusatz: Sei $s_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n}\hat{f}_k e^{ikx}$, dann ist

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(x)|^2\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T(x)|^2\,dx.$$

6.5.7 Satz von Riemann-Lebesgue

Sei $g \in R([a,b])$. Dann gilt

$$\int_a^b g(t) \begin{Bmatrix} e^{ikt} \\ \sin kt \\ \cos kt \end{Bmatrix} dt \to 0 \text{ für } k \to \pm\infty.$$

Beweis: Für den Fall, daß $[a,b] \subseteq (-\pi,\pi]$:
Setze

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{in } [a,b] \\ 0 & \text{in } (-\pi,\pi] \setminus [a,b] \end{cases}$$

2π-periodisch fortgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_a^b g(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \\ = \hat{f}_k \to 0 \end{aligned}$$

6.5.8 Der Dirichletkern

Sei

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Dann gilt

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t)\,dt.$$

Dabei ist D_n der *Dirichletkern* und ist bestimmt durch

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{1}{2}x}$$

und

$$D_n(0) = 2n+1 = \lim_{x\to 0} D_n(x).$$

Beweis: Es ist

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}e^{ikx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)}_{=D_n(x-t)} \cdot f(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)x} \\
&= e^{-inx} \sum_{j=0}^{2n} e^{ijx} = e^{-inx} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})ix}\left(1 - e^{i(2n+1)x}\right)}{e^{\frac{-ix}{2}}(1 - e^{ix})} \\
&= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})ix} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{2}{2}}} = \frac{-2i\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{-2i\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

6.5.9 Riemannscher Lokalisationssatz

Es ist

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = s(x)
$$

$$
\iff \int_0^{\delta} D_n(t)\left[f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)\right] dt \to 0 \text{ für } n \to \infty
$$

für ein $\delta > 0$. Das bedeutet: f bestimmt alle

$$
\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t)\, dt = \left| \begin{matrix} x - t = y \\ dt = -dy \end{matrix} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \underbrace{D_n(y) f(x-y)}_{2\pi\text{-periodisch in } y}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} D_n(y) f(x-y)\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(y) f(x-y)\, dy = \left| \begin{matrix} \text{Im 1. Integral subst.:} \\ y = -u \\ dy = -du \end{matrix} \right| \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{0} \underbrace{D_n(-u)}_{\text{gerade}} f(x+u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(y) f(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(y)\left[f(x+y) + f(x-y)\right] dy
\end{aligned}
$$

Einschub:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi D_n(y)\left[f(x+y)+f(x-y)\right]\,dy\ ?\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi D_n(y)(1+1)\,dy\\ &\text{[setze } f(t)\equiv 1 \text{ und } s_n(x)=1]\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}s_n(x)-s(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi D_n(y)\left[f(x+y)+f(x-y)-2s(x)\right]\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_0^\delta \qquad + \int\limits_\delta^\pi \qquad\right].\end{aligned}$$

Zeige nun noch

$$\int\limits_\delta^\pi D_n(y)\underbrace{\left[f(x+y)+f(x-y)-2s(x)\right]}_{=:g(y)}\,dy \to 0 \text{ für } n\to\infty$$

Dann ist der Beweis erledigt.

Betrachte nun $D_n(y)\cdot g(y)$:

$$D_n(y)\cdot g(y) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\cdot\underbrace{\frac{g(y)}{\sin\frac{1}{2}y}}_{=h(y)}\quad\text{in } \delta\le y\le\pi$$

ist integrierbar über $[\delta,\pi]$:

$$\begin{aligned}\int\limits_\delta^\pi D_n(y)\cdot g(y)\,dy &= \int\limits_\delta^\pi \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\cdot h(y)\,dy = \begin{vmatrix} y=2t\\ dy=2dt\end{vmatrix}\\ &= 2\int\limits_{\delta/2}^{\pi/2}\sin((2n+1)t)\cdot h(2t)\,dt \to 0 \text{ für } n\to\infty\end{aligned}$$

nach dem Satz von Riemann-Lebesgue (siehe 6.5.7, Seite 151).

6.6 Konvergenz- und Approximationssätze

6.6.1 Satz

Sei $f \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{ikx}$. Setzt man $g(t)=f(x+t)+f(x-t)-2c$ bei festem x und konvergiert

$$\int\limits_0^\pi \frac{|g(t)|}{t}\,dt,$$

dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = c.$$

Beweis: Siehe 6.6.3.

6.6.2 Beispiele

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \pi \end{cases},$$

   2π-periodisch fortgesetzt. Es ist

$$f \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{\pi(2k-1)}$$

   Nach dem Satz ist überall Gleichheit, denn:
   Für $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ ist $g(t) = 0$ in $[0, \delta]$.
   Für $x = 0$ und $c = \frac{1}{2}$ ist $g(t) = 1 + 0 - 2\frac{1}{2} = 0$ in $(0, \delta)$.

2. Sei $f(x) = |x|$ in $-\pi < x \leq \pi$, 2π-periodisch fortgesetzt.
   Für $0 < x < \pi$ ist

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = x + t + x - t - 2x = 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \delta.$$

   Für $x = 0$ ist

$$f(t) + f(-t) - 2f(0) = |t| + |t| - 0 = 2|t| = f(t)$$

$$\int_0^\delta \frac{g(t)}{t}\, dt = \int_0^\delta 2\, dt \checkmark$$

   Also ist

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2} = |t| \text{ in } -\pi \leq t \leq \pi.$$

6.6.3 Beweis von 6.6.1

Es ist

$$s_n(x) - c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta D_n(t) g(t) + \varepsilon_n,$$

wobei $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$ (nach dem Lokalisationssatz) für jedes $\delta > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\int_0^\delta \frac{|g(t)|}{t}\, dt < \varepsilon.$$

Zu diesem δ existiert ein n_0 mit $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}}}_{=h(t)} + \frac{1}{\frac{t}{2}}\right) \\ &= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \left(\frac{2}{t} + h(t)\right) \end{aligned}$$

(Aufgabe: Zeige, daß $h(t)$ in $t = 0$ stetig ist.)
Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue ist

$$\begin{aligned} \int_0^\delta D_n(t)g(t)\,dt =& 2\int_0^\delta \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\frac{g(t)}{t}\,dt \\ &+ \underbrace{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) g(t)h(t)\,dt}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} \end{aligned}$$

Also ist das 2. Integral für $n \geq n_1$ betragsmäßig kleiner als ε. Zusammen gilt also:

$$|s_n(x) - c| \overset{\odot}{\leq} \frac{2}{2\pi}\int_0^\delta \left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| \cdot \frac{|g(t)|}{t}\,dt + \varepsilon + \varepsilon$$

mit $n \geq \max(n_0, n_1)$ bei $\odot$.

6.6.4 Beispiele

1. Sei
$$h(t) = \begin{cases} a & \text{für } -\pi < t < t_0 \\ b & \text{für } t_0 < t < \pi \end{cases},$$
beleibig in $t = t_0$ und $t = \pi$ und 2π-periodisch fortgesetzt. Dann ist
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}_k e^{ikt} = \begin{cases} a & \text{für } -\pi < t < t_0 \\ b & \text{für } t_0 < t < \pi \\ \frac{a+b}{2} & \text{für } t_0 \text{ und } \pi \end{cases}$$

2. Sei
$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$
mit $\lim\limits_{t\to t_0-} f(t) = a$ und $\lim\limits_{t\to t_0+} f(t) = b$. Betrachte dann $g(t) = f(t) - h(t)$:
$$\sum \hat{f}_k e^{ikt} = \underbrace{\sum \hat{h}_k e^{ikt}}_{\frac{a+b}{2} \text{ in } t_0} + \sum \hat{g}_k e^{ikt}$$
g ist stetig in t_0, wenn man $g(t_0) = 0$ setzt.

6.6.5 Satz

Ist f in t_0 Dini-Stetig, d. h. gilt $|f(t) - f(t_0)| \le \omega(|t - t_0|)$ mit $\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h}\,dh < \infty$. Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt_0} = f(t_0).$$

Bemerkung: Beispiele für die Dini-Stetigkeit:

(a) Lipschitz-Stetigkeit: $|f(t) - f(t_0)| \le L|t - t_0|$. Setze $\omega(h) = Lh$.

(b) Hölder-Stetigkeit: $|f(t) - f(t_0)| \le L|t - t_0|^\alpha$ für ein $\alpha \in (0,1)$.
Setze $\omega(h) = Lh^\alpha$ und

$$\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h}\,dh = L\int_0^\pi h^{\alpha-1}\,dh$$

existiert.

(c) Sei f differenzierbar in t_0. Dann gilt (a).

6.6.6 Satz

Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dini-stetig und 2π-periodisch, d. h. es ist $|f(x) - f(y)| \le \omega(|x - y|)$ mit $\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h}\,dh < \infty$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = f(x).$$

6.6.7 Satz

Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-periodisch, dann konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|$. Da $|\hat{f}_k e^{ikx}| = |\hat{f}_k|$ ist, konvergiert also $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Beweis: Sei $k \ne 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{f(t)e^{-ikt}\frac{1}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-ikt}}{ik}\,dt\right] = \frac{1}{ik}c_k\end{aligned}$$

Dabei ist c_k der k-te Fourierkoeffizient von f'. Also ist $c_k = ik\hat{f}_k$.

$$f \sim \sum \hat{f}_k e^{ikx} \;\Rightarrow\; f' \sim \sum \left(\hat{f}_k e^{ikx}\right)'.$$

Nach der Besselschen Ungleichung gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Also ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{f}_k|^2 < \infty.$$

Und damit gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot k|\hat{f}_k| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=n}^{n} \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2} \\ &\leq \text{const., unabhängig von } n.\end{aligned}$$

6.6.8 Beispiel

Sei $f(t) = \sin t$. f ist gerade $(f(-t) = f(t))$ und Lipschitzstetig:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(<)| &= ||\sin x| - |\sin y|| \\ &\leq |\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos \xi| \leq |x - y|.\end{aligned}$$

Suche die a_k für die Fourierreihe

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi}$$

und für $k > 0$ ist

$$\begin{aligned}a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos kt \, dt &= \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{\sin t \frac{\sin kt}{k} \Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} (\cos t) \frac{\sin kt}{k} \, dt \right] \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left[\cos t \frac{-\cos kt}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} / -\sin t) \frac{-\cos kt}{k} \, dt \right] \\ &= -\frac{2}{k^2\pi} \left[-1 \cdot (-\cos k\pi) + 1 - \int_0^{\pi} \sin t \cos kt \, dt \right] = -\frac{2}{k^2\pi}(1 + (-1)^k) + \frac{1}{k^2} a_k.\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) a_k = \frac{-2}{k^2\pi}(1 + (-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } k \\ \dfrac{-4}{\pi k^2} & \text{für gerades } k \end{cases},$$

also

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-4}{\pi(2k)^2(1-\frac{1}{(2k)^2})} = \frac{-4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2-1} \\ a_{2k+1} &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$|\sin x| = \frac{4}{\pi}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right).$$

Für $x = 0$ gilt dabei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 1.$$

6.6.9 Satz von Fejer

Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, so gilt

$$\sigma_n(x) \to f(x) \text{ für } n \to \infty$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Dabei ist

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}$$

das n-te *Fejer-Mittel*.

Beweis: Es ist

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-t) \cdot f(t)\,dt.$$

Damit ist

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\right) \cdot f(t)\,dt.$$

Dabei wird

$$F_n(x-t) = \left(\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\right) \cdot \frac{1}{n+1}$$

der *Fejer-Kern* genannt. Es gilt:

$$(n+1)F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Für $z = \exp(\frac{ix}{2})$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}(z^{2k+1}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1}\right) \\
&= \operatorname{Im}(z + z^3 + z^5 + \cdots + z^{2n+1}) = \operatorname{Im}(z(1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n})) \\
&= \operatorname{Im}\left(z \cdot \frac{1-(z^2)^{n+1}}{1-z^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-z^{2n+2}}{\bar{z}\cdot z}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-z^{2n+2}}{-2i\cdot \operatorname{Im} z}\right) = \operatorname{Im}\frac{i}{2}\cdot\frac{1-z^{2n+2}}{\operatorname{Im} z} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{Re}(1-z^{2n+2})}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos((n+1)x)}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Also ist

$$F_n(x) = \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{1-\cos((n+1)x)}{(\sin\frac{x}{2})^2} \geq 0$$

und

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\cdot(f(t)-f(x))\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\cdot|f(t)-f(x)|\,dt$$

Noch zu zeigen: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_2| < \delta$$

(gleichmäßige Stetigkeit).

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\cdot|f(t)-f(x)|\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} F_n(x-t)\cdot|f(t)-f(x)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x-\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{x+\delta}^{\pi} = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Schätze nun die I_n ab:

$$\begin{aligned}
I_1 &< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{x-\delta}^{x^\delta} F_n(x-t)\,dt \leq \varepsilon\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\,dt}_{=1} \\
&= \varepsilon \text{ unabhängig von } x \text{ und } n \\
I_2 &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x-\delta} F_n(x-t)\cdot 2M\,dt,
\end{aligned}$$

da $|f(t)| \leq M$ für alle t ist. Außerdem ist

$$F_n(x-t) \leq \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2}{\sin^2\frac{\delta}{2}} < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Dabei ist $-\pi \leq t \leq x - \delta$, also $x - t \geq \delta$. Zusammen ist also $I_2 < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Mache nun die gleich Abschätzung für I_3 und für alle Integrale gilt zusammen:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

6.6.10 Approximationssatz von Weierstraß

Ist f stetig in $[a,b]$, so gibt es eine Polynomfolge (P_n), die gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Äquivalent hierzu ist, daß es zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom P gibt mit $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ in $[a,b]$.

Beweis: Für das Intervall $[-1,1]$.
Anderenfalls wird die Funktion $\tilde{f}(t) = f(a + \frac{b-a}{2}(t+1)$ betrachtet. Dann ergibt sich ein Polynom $\tilde{P}$ mit $|\tilde{f}(t) - \tilde{P}(t)| < \varepsilon$ in $[-1,1]$ und für das Polynom $P(x) = \tilde{P}(-1+2\frac{x-a}{b-a})$ ist dann $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $a \le x \le b$.
Nun der Beweis: $f(\cos t) = g(t)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, gerade. Sei $\sigma_n(t)$ das n-te Fejer-Mittel für die Funktion g. Es ist $\sigma_n \to g$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, d. h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $|\sigma_n(t) - f(\cos t)| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Da g gerade ist, folgt:

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot \cos kt \text{ für } n \ge n_0 \text{ fest}$$

Frage: Gibt es ein Polynom P_n mit $\sigma_n(t) = P_n(\cos t)$?
Falls ja:

$$|P_n(\cos t) - f(\cos t)| < \varepsilon \text{ für } n \ge n_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}$$
$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für } n \ge n_0 \text{ und } -1 \le x \le 1.$$

Die Existenz von dieses Polynoms wird im folgenden Satz bewiesen. Hier nun 2 Beispiele:
Für $n = 1$ ist $T_1(x) = x$.
Für $n = 2$ ist $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$, also ist $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

6.6.11 Satz

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n mit $\cos(nt) = T_n(\cos t)$. T_n heißt n-tes *Tschebyscheffpolynom*.

Beweis: Zeige mit Induktion:

$$\cos nt = T_n(\cos t)$$

und

$$\sin nt = U_n(\cos t)\sin t \text{ mit Polynom } U_n.$$

„$n = 1$": $T_1(x)$ und $U_1(x) = 1$.

„$n \mapsto n+1$":

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)t) &= \cos(nt+t) = \cos(nt)\cos t - \sin(nt)\sin t \\
&= T_n(\cos t)\cos t - U_n(\cos t)(\sin t)^2 = T_n(\cos t)\cos t - U_n(\cos t)(1-(\cos t)^2) \\
&= T_{n+1}(\cos t) \\
T_{n+1}(x) &= T_n(x)\cdot x - U_n(x)(1-x^2) \\
\sin((n+1)t) &= \frac{-1}{n+1}(\cos(n+1)t)' = \frac{-1}{n+1}(T_{n+1}(\cos t))' \\
&= \frac{-1}{n+1}T'_{n+1}(\cos t)(-\sin t) = U_{n+1}(\cos t)\sin t \\
U_{n+1} &= \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

7 Metrische Räume[1]

7.1 Der euklidische Raum

7.1.1 Definition von $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ wird $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ geschrieben. Dies ist ein n-Tupel. Dabei ist x_ν die ν-te Komponente oder Koordinate von x.
Im $\mathbb{R}^2$ wird allgemein das Paar (x, y) statt (x_1, x_2) benutzt.
Im $\mathbb{R}^3$ wird allgemein das Tripel (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) benutzt.
Der $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum (linearer Raum) über $\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es ist $\dim \mathbb{R}^n = n$. Die Standardbasis ist

$$e^\nu := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \text{ mit } \nu = 1, \ldots, n$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \cdots + x_n e^n$$

$$0 := (0, 0, \ldots, 0)$$

7.1.2 Definition des Skalarproduktes und der euklidischen Norm

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ *Skalarprodukt* (Innenprodukt) zwischen x und y, und $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ heißt *euklidische Norm* von x. Ausführlich:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}$$

7.1.3 Eigenschaften des Skalarproduktes

(S1) $x \cdot x > 0$ für $x \neq 0$.

(S2) $(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$.

(S3) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(S4) $x \cdot y = y \cdot x$.

[1] Version 4.10 vom 19. Dezember 2002

7.1.4 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

(Bunjakowskij)

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$$

und „=“ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. Anders geschrieben:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu \right|^2 \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 \right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 \right)$$

Beweis: Trivial für $x = 0$ oder $y = 0$.
Zunächst für $\|x\| = \|y\| = 1$: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + ty\|^2 \\ &= (x + ty) \cdot (x + ty) \\ &= \|x\|^2 + 2t(x \cdot y) + t^2 \|y\|^2 \\ &= 1 + 2t(x \cdot y) + t^2 \\ &= (t + (x \cdot y))^2 + 1 - (x \cdot y)^2 \end{aligned}$$

Setze nun $t = t_0 := -x \cdot y$. Dann ist

$$\begin{aligned} & 0 \leq 1 - (x \cdot y)^2 \\ \iff & (x \cdot y)^2 \leq 1 = \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn $x + t_0 y = 0$ ist, d. h. wenn x und y linear abhängig sind.
Allgemeiner Fall: Setze

$$\frac{x}{\|x\|} = \xi \text{ und } \frac{y}{\|y\|} = \eta \;\Rightarrow\; \|\xi\| = \|\eta\| = 1$$

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |(\|x\|\xi) \cdot (\|y\|\eta)| = \|x\| \, \|y\| \underbrace{\xi \cdot \eta}_{\leq 1} \\ &=\leq \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn ξ und η, d. h. x und y linear abhängig sind.
Beachte: Für den Beweis wurden nur die Regeln (S1)-(S4) gebraucht!

7.1.5 Eigenschaften der Euklidnorm

(N1) $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$ (Definitheit).

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität).

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksregel).

(N4) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x + y\|$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung) (folgt aus (N3)).

Beweis:

(N3)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y\\ &\overset{(1)}{\leq} \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2\\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{„}=\text{“} &\iff \text{„}=\text{“ bei (1) und CSU}\\ &\iff x\cdot y \geq 0 \text{ und } x,y \text{ linear abhängig}\\ &\iff x=0 \text{ oder } y=0 \text{ oder } y=\lambda x \text{ mit } \lambda\geq 0\end{aligned}$$

(N4) Es ist $x = x + y - y$. Damit ist

$$\|x\| = \|(x+y)-y\| \overset{(\text{N3})}{\leq} \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$$

Damit ist $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$. Genauso wird $\|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$ gezeigt und damit folgt die Behauptung.

7.1.6 Satz des Pythagoras

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x\cdot y = 0$ ist

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(x, y orthogonal, $x \perp y$).

Beweis:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\underbrace{x\cdot y}_{=0} + \|y\|^2 = \|x^2\| + \|y\|^2.$$

7.1.7 Definition: Norm, Normierter Raum

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|.\|: E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ heißt *Norm*, wenn sie die Eigenschaften (N1)-(N3) hat (Es gilt immer auch (N4)). E, oder genauer $(E, \|.\|)$ heißt dann *normierter Raum*.

7.1.8 Beispiele

(a) Nehme zu $E = \mathbb{R}^n$ die Euklidnorm.

(b) Nehme zu $E = \mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$.
Beweis für (N3): Für festes $\nu = 1, \ldots, n$ ist

$$|x_\nu + y_\nu| \leq |x_\nu| + |y_\nu| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Also ist insgesamt $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

(c) Nehme zu $E = \mathbb{R}^n$ die Summennorm $\|x\|_1 := \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|$.
Beweis für (N3):

$$\sum_{\nu=1}^n \underbrace{|x_\nu + y_\nu|}_{\le |x_\nu|+|y_\nu|} \le \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| + \sum_{\nu=1}^n |y_\nu|$$

(d) Nehme zu $E = C([a,b])$ =Raum der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ die Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| \colon a \le t \le b\}$.
Beweis für (N3): Für $a \le t \le b$ ist

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)| &\le |f(t)| + |g(t)| \\ &\le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \|f+g\|_\infty &\le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

(e) Nehme zu $E = s = \{(a_n) \colon a_n \in \mathbb{R},\, n \ge 1,\, (a_n) \text{ beschränkt}\}$ die Supremumsnorm $\|(a_n)\|_\infty := \sup\{|a_n| colon n \in \mathbb{N}\}$.
Beweis für (N3): Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| \le \|(a_n)\|_\infty + \|(b_n)\|_\infty$$

Damit ist dann $\|(a_n + b_n)\|_\infty \le \|(a_n)\|_\infty + \|(b_n)\|_\infty$.

7.1.9 Definition: Skalarprodukt

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \cdot y$, mit den Eigenschaften (S1)-(S4) heißt *Skalarprodukt* auf E (Innenprodukt).

7.1.10 Satz

Ist $x \cdot y$ ein Skalarprodukt auf E, so gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung und $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ ist eine Norm.

7.1.11 Beispiele

1. Sei $E = C([a,b])$ mit dem Innenprodukt

$$(f|g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

Dann ist

$$\|f\|^2 := \int_a^b (f(t))^2\,dt, \qquad \|f\| = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,dt}$$

Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \int_a^b (f(t))^2\,dt \cdot \int_a^b (g(t))^2\,dt.$$

Weise die Eigenschaft (S1) nach: $(f|f) > 0$, falls f nicht die Nullfunktion ist: Sei $t_0 \in [a,b]$, so daß $f(t_0) \neq 0$ ist. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(t)| > k > 0$ in $I = [a,b] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ und damit ist

$$(f|f) = \int_a^b (f(t))^2 \, dt \geq k^2 \cdot \text{Länge von } I > 0.$$

2. Sei

$$E = \left\{ (a_n)\colon \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert} \right\}$$

Ist E ein linearer Raum? Zu zeigen ist, daß für (a_n), $(b_n) \in E$ auch $(a_n + b_n) \in E$ ist. Es ist $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$. Dies konvergiert, wenn $2a_nb_n$ konvergiert, da die anderen Terme nach Voraussetzung konvergent sind. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |b_n| &\overset{\text{CSU im } \mathbb{R}^n}{\leq} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2} =: C \end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$.
Das Skalarprodukt ist hier:

$$((a_n)|(b_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$$

Aufgabe: Beweise (S1)-(S4) mit Hilfe der Regeln für Reihen.
Bemerkung: Der Raum in diesem Beispiel wird ℓ^2 („L-zwei") genannt und

$$\|a_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

heißt ℓ^2-Norm.

7.2 Topologische Grundbegriffe

7.2.1 Definition: Metrik, metrischer Raum

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften

(M1) $d(x,y) > 0$ für $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$ (Definitheit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

heißt *Metrik*. Aus (M2) und (M3) folgt

(M4) $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$ (umgekehrte Dreiecksungleichung).

M mit der Metrik d heißt *metrischer Raum.*

Beweis: Es ist $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, also ist $d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$. Zeige genauso, daß $d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x) = d(x,y)$ ist. Zusammen ist dann $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

7.2.2 Beispiele

(1) E sei normierter Raum mit der Norm $\|.\|$. Dann ist $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik, insbesondere

(2) $\mathbb{R}^n$ mit Euklidmetrik:

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - y_\nu)^2}$$

(3) $\mathbb{R}^n$ mit Metrik von Manhatten:

$$d(x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu| = \|x - y\|_1$$

(4) Metrik des französischen Eisenbahnsystems: Wenn man von einem Punkt zum aderen will, muß man entweder über P (Paris) fahren, oder beide Punkte liegen an der gleichen Eisenbahnstrecke nach Paris.

(5) Sei $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$d(x,y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

ebenfalls eine Metrik, wobei $d(x,y) < 1$ ist.
Beweise (M1)-(M3) als Aufgabe. Tip zu (M3): $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ ist monoton wachsend für $0 \leq t < \infty$.

(6) (M,d) sei metrischer Raum und $N \subseteq M$, $n \neq \emptyset$. Dann ist (N,d) ein metrischer Raum (N erbt die Metrik von M).

A Offene Mengen

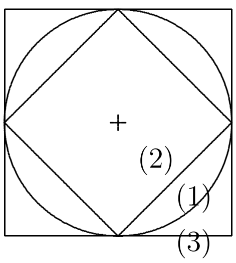
In diesem Abschnitt bedeuten immer M ein metrischer Raum, d eine Metrik, $A, B, C, \ldots \subseteq M$, $x, y, a, \ldots \in M$ und $r, \varrho, \varepsilon, \delta, \ldots > 0$.

7.2.3 Definition: Offene Kugel

$K(a,r) = \{x \in M \colon d(x,a) < r\}$ heißt *offene Kugel um a mit Radius $r > 0$*.

7.2.4 Beispiel

im $\mathbb{R}^2$:
(1) Euklid
(2) Manhatten $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
(3) $d(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$



Hier ist jedesmal die Kugel $(K((0,0),1)$ dargestellt.

7.2.5 Definition: Innerer Punkt, Inneres, offen

(1) $a \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn es eine Kugel $K(a,r) \subseteq A$ gibt.

(2) $A^0 = \{x \colon x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt *Inneres* oder *offener Kern* von A.

(3) A heißt *offen*, wenn A nur aus inneren Punkten besteht.

7.2.6 Beispiel

Im $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidmetrik. Behauptung: Für $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot x > \alpha\}$$

offen. Sei $x \in H$. Dann ist $a \cdot x = \alpha + \delta > \alpha$.
Behauptung: $K(x,\delta) \subseteq H$.
Sei $\xi \in K(x,\delta)$. D. h. $\xi = x + \delta y$ mit $\|y\| \le 1$. Ist $\xi \in H$?

$$a \cdot \xi = \underbrace{a \cdot x}_{=\alpha+\delta} + \delta a \cdot y \overset{\text{CSU}}{\geq} \alpha + \delta - \delta \underbrace{\|a\|}_{=1}\underbrace{\|y\|}_{<1} > \alpha$$

Also ist $\xi \in H$, $K(x,\delta) \subseteq H$ und x ist innerer Punkt.

7.2.7 Satz

(a) $\emptyset$, M, $K(a,r)$, A^0 sind offen.

(b) Sind $A_1, \ldots, A_m$ offen, so ist $A_1 \cap \cdots \cap A_m$ offen.

(c) Ist A_λ für $\lambda \in \Lambda$ offen, so ist $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ offen.

Beweis:

(a) $\emptyset$, M offen ist klar.
$\mathbf{K(a,r)}$: Sei $b \in K(a,r)$. Dann ist $\delta = r - d(a,b) > 0$.
Zeige: $K(b,\delta) \subseteq K(a,r)$.
Sei $x \in K(b,\delta)$. Dann ist

$$d(x,a) \le \underbrace{d(x,b)}_{<\delta} + \underbrace{d(b,a)}_{=r-\delta} < \delta + r - \delta = r,$$

also $x \in K(a,r)$.
$\mathbf{A^0}$: Sei $a \in A^0$. Dann ist a innerer Punkt von A, also existiert eine Kugel $K(a,r) \subseteq A$. Ist diese Kugel $\subseteq A^0$?
Sei $b \in K(a,r)$. Dann ist b innerer Punkt von $K(a,r)$, d. h. es existiert ein $\delta > 0$ mit $K(b,\delta) \subseteq K(a,r) \subseteq A$.
Für $b \in A^0$ folgt also $K(a,r) \subseteq A^0$, d. h. $(A^0)^0 = A^0$.

(b) Sei $A_1 \cap \cdots \cap A_m = A$. Wenn $a \in A$ ist, existieren $r_j > 0$ mit $K(a,r_j) \subseteq A_j$ für $j = 1, \ldots, m$.
Setze $r := \min\{r_1, \ldots, r_m\}$. Dann ist

$$K(a,r) \subseteq K(a,r_j) \subseteq A_j \text{ für } j = 1, \ldots, m,$$

also ist $K(a,r) \subseteq A$, A ist offen.

(c) Sei $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ und $a \in A$, also $a \in A_j$ für ein λ. Dann existiert ein $r > 0$ mit $K(a, r) \subseteq A_\lambda \subseteq A$. A ist offen.

Achtung: Sei $A_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < \frac{1}{j} \right\} = K\left(0, \frac{1}{j}\right)$ im $\mathbb{R}^n$.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_j = \{0\} \text{ ist } \textbf{nicht offen}$$

7.2.8 Bemerkung

Jede Menge A mit $K(a, r) \subseteq A$ für irgendein $r > 0$ heißt *Umgebung* des Punktes a.

B Folgen

In diesem Abschnitt ist M ein metrischer Raum, $a \in M$ und $a_n \in M$ für $n = 1, 2, \ldots$.

7.2.9 Definition: Folge

Eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$, heißt *Folge*, und wird mit (a_n) bezeichnet. (a_n) heißt konvergent gegen A, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$ ist. Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

7.2.10 Eigenschaften

(a) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

(b) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $d(a_n, b_n) \to d(a, b)$.

(c) Aus $a_n \to a$ folgt $d(a, a_n) \leq$const. für alle n. Konvergente Folgen sind auch beschränkt, d. h. es existiert eine Kugel, die alle a_n enthält.

Beweis:

(a) Gelte $a_n \to a$ und $a_n \to b$. Dann ist

$$0 \leq d(a, b) \leq \underbrace{d(a, a_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(a_n, b)}_{\to 0} \to 0$$

Also ist $d(a, b) = 0$, d. h. $a = b$.

(b)

$$\begin{aligned} |d(a_n, b_n) - d(a, b)| &= |d(a_n, b_n) - d(a_n, b) + d(a_n, b) - d(a, b)| \\ &\leq |d(a_n, b_n) - d(a_n, b)| + |d(a_n, b) - d(a, b)| \\ &\leq d(b_n, b) + d(a_n, a) \to 0 \end{aligned}$$

(c) Sei $\varepsilon = 1$.
Dann ist $d(a_n, a) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $d(a_n), a) \leq c$ für $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$. Setze $e = \max(1, c)$.
Dann ist $a_n \in K(a, e)$ für alle n.
Gibt es auch ein r, so daß $a_n \in K(b, r)$ für alle n ist?

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a) + d(a, b) \leq e + d(a, b) =: r$$

7.2.11 Beispiel

Nehme $C([a, b])$ mit der Metrik $d(f, g) := \|f - g\|_\infty = \max\limits_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$. Dann sind äquivalent:

1. $f_n \to f$ im Raum, d. h. $d(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$.
2. $f_n(t) \to f(t)$ gleichmäßig in $[a, b]$.

Beweis:

„⇒" Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Dies gilt für $a \leq t \leq b$, d. h. es liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

„⇐" Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ und alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist $f \in D([a, b])$, also ist

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

7.2.12 Satz

Im $\mathbb{R}^n$ (mit Euklidmetrik) sind äquivalent:

1. Die Folge $(x^{(m)})$ konvergiert gegen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Die Folgen $(x_\nu^{(m)})$ konvergieren für $\nu = 1, \ldots, n$ gegen x_ν.

Beweis:

„⇒": Gelte $x^{(m)} \to x$ für $m \to \infty$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist für $1 \leq \nu \leq n$:

$$|x_\nu^{(m)} - x_\nu| \leq \|x^{(m)} - x\| \to 0 \text{ für } m \to \infty,$$

d. h. $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$.

„⇐": Gelte $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ für $m \to \infty$ und sei $x := x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist

$$\|x^{(m)} - x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \left(x_\nu^{(m)} - x_\nu\right)^2} \overset{\text{CSU}}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n} \left|x_\nu^{(m)} - x_\nu\right| \to \text{ für } m \to \infty.$$

7.2.13 Regeln

Im $\mathbb{R}^n$ gelten die folgenden Regeln:

(1) $x^{(m)} \to x$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x^{(m)} \to \lambda x$.

(2) $x^{(m)} \to x$, $y^{(m)} \to y \Rightarrow x^{(m)} + y^{(m)} \to x + y$.

(3) $x^{(m)} \to x$, $y^{(m)} \to y \Rightarrow x^{(m)} \cdot y^{(m)} \to x \cdot y$, insbesondere $\|x^{(m)}\| \to \|x\|$.

Beweis: Für (1) und (2): Aufgabe. Für (3) in der Globalübung vom 18. April 1994.

Bemerkung: (1) und (2) gelten in jedem normierten Raum, (3) gilt in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt.

C Abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt ist (M, d) ein metrischer Raum, $A, B, \ldots \subseteq M$ und $a_n, a \in M$.

7.2.14 Definition: Rand, abgeschlossen, Häufungspkt., abgeschl. Hülle

(1) $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn $M \setminus A$ offen ist.

(2) $a \in M$ heißt *Häufungspunkt* von $A \subseteq M$, wenn es eine Folge (a_n) in $A \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$ gibt.

(3) A' ist die *Menge aller Häufungspunkte* von A.

(4) $\bar{A} = A \cup A'$ ist die *abgeschlossene Hülle* von A.

(5) $\partial A = \bar{A} \setminus A^0$ ist der *Rand* von A, die Punkte von ∂A sind die *Randpunkte*.

7.2.15 Beispiel

Sei $A = \{x \colon \|x\| \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^n$ mit Euklidmetrik.

(1) A ist abgeschlossen, d. h. $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.
Sei $x \in B$. Dann ist $\|x\| = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$.
Zeige $K(x, \delta) \subseteq B$: Sei $y \in K(x, \delta)$. Dann ist

$$\|y\| = \|y - x + x\| = \|y - x - (-x)\|\|\| \geq \|x\| - \|y - x\| > 1 + \delta - \delta = 1.$$

Also ist $K(x, \delta) \subseteq B$, x ist innerer Punkt von B, B ist offen und A abgeschlossen.

(2) Es ist $A' = A = \bar{A}$.
Beweis: Sei $a \in A$ mit $a \neq 0$ und $a^{(m)} = (1 - \frac{1}{m}) \cdot a \neq a$.
Es ist $a^{(m)} \to a$ und $\|a^{(m)}\| = |1 - \frac{1}{m}| \cdot \|a\| < 1 \cdot \|a\| = 1$, d. h. $a^{(m)} \in A$.
Also ist a Häufungspunkt von A und damit $A \subseteq A'$.
Jetzt ist noch $A' \subseteq A$ zu zeigen:
Sei $a \in A'$. Dann gibt es eine Folge $a^{(m)} \in A$ mit $a^{(m)} \to a$ (bzw. $a = \lim\limits_{m \to \infty} a^{(m)}$) und es ist

$$\|a\| = \lim_{m \to \infty} \underbrace{\|a^{(m)}\|}_{\leq 1} \leq 1,$$

d. h. $a \in A$. Also ist $A' = A$ und damit auch $\bar{A} = A$.

(3) Es ist $A^0 = \{x \colon \|x\| < 1\} = K(0,1)$.
Beweis: $K(0,1) \subseteq A^0$ ist klar, da $K(0,1) \subseteq A$ und $K(0,1)$ offen ist.
Sei umgekehrt $x \in A^0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x,\delta) \subseteq A$. Insbesondere ist $\|x\| \leq 1$.
Wenn $\|x\| = 1$ ist, setze $y = x(1 + \frac{\delta}{2})$ und es ist $\|y - x\| = \frac{\delta}{2}\|x\| < \delta$, d. h. $y \in K(x,\delta)$.
Es ist aber $\|y\| = (1 + \frac{\delta}{2})\|x\| > 1$, d. h. $y \notin A$. Widerspruch!
Somit ist $A^0 = K(0,1)$. Also gilt $\partial A = \{x \colon \|x\| = 1\}$.

7.2.16 Aufgabe

Es ist bereits gezeigt, daß $H = \{x \colon a \cdot x > \alpha\}$ für $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ offen ist. Zeige: $\tilde{H} = \{x \colon a \cdot x \geq \alpha\}$ ist abgeschlossen. Bestimme die Häufungspunkte, das Innere und den Rand.

7.2.17 Satz

(a) $\emptyset$, M, A', $\bar{A}$ und ∂A sind abgeschlossen.

(b) A abgeschlossen $\iff$ $A' \subseteq A$ $\iff$ $\partial A \subseteq A$ $\iff$ $A = \bar{A}$.

(c) $a \in M$ ist Randpunkt von A $\iff$ Es gibt Folgen (a_n) in A und b_n in $M \setminus A$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to a$.

(d) Sind $A_1, \ldots, A_m$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ abgeschlossen.

(e) Sind A_λ für $\lambda \in \Lambda$ abgeschlossen, so ist $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ abgeschlossen.

Beweis:

(a) $\emptyset$ und M klar.
Beweis für $\bar{A}$. Es ist $\bar{A} = A \cup A'$. Sei $B = M \setminus \bar{A}$ und $b \in B$.
Es gilt: $b \notin A$ und $b \notin A'$. Also existiert keine Folge (a_n) in A mit $a_n \neq b$ und $a_n \to b$. Dann existiert auch keine Folge (a_n) in A mit $a_n \to b$,
d. h. es existiert $\varepsilon > 0$ mit $K(b,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ und $K(b,\varepsilon) \cap A' = \emptyset$.
Es ist also $K(b,\varepsilon) \subseteq B$, d. h. $b \in B^0$. B ist offen, $\bar{A}$ ist geschlossen.

(b) Zeige hier: A ist abgeschlossen $\iff$ $A = \bar{A}$

„$\Leftarrow$“: $A = \bar{A}$, also ist A abgeschlossen.

„$\Rightarrow$“: Zeige $A = \bar{A}$.

„$\subseteq$“: Es ist $A \subseteq A \cup A' = \bar{A}$

„$\supseteq$“: Sei $a \in \bar{A} = A \cup A'$. Dann ist $a \in A$ (o.k) oder $a \in A'$.
Sei also $a \in A'$, d. h. es existiert ein Folge (a_n) in A mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$.
Wäre $a \notin A$, dann wäre $a \in B = M \setminus A$. Dabei ist B offen.
Somit gibt es $\varepsilon > 0$ mit $K(a,\varepsilon) \subseteq B$.
Für $n \geq n_0$ ist dann $d(a_n, a) < \varepsilon$, d. h. $a_n \in K(a,\varepsilon) \subseteq B = M \setminus A$. Dann wären die $a_n \notin A$. Widerspruch zu $a_n \in A$.
Also muß $a \in A$ sein.

(c) „$\Rightarrow$“: Sei $a \in \partial A = \bar{A} \setminus A^0$. Dann ist $a \in A'$ oder $a \in A$.
Für $a \in A'$ existiert eine Folge $(a_n) \in A \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$.
Für $a \in A \setminus A'$ Setze $a_n = a$.
Da $a \notin A^0$, folgt daß zu jedem $\varepsilon > 0$, z. B. zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existiert eine Folge $b_n \notin A$, aber $d(a, b_n) < \frac{1}{n}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $a_n \in A$ mit $a_n \to a$ (1) und $b_n \notin A$ mit $b_n \to a$ (2).
Aus (1) folgt $a \in A'$ oder $a \in A$, also $a \in \bar{A}$.
Aus (2) folgt $a \notin A^0$.
Zusammen gilt: $a \in \bar{A} \setminus A^0 = \partial A$.

(d) Nach deMorgan gilt:

$$M \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \underbrace{(M \setminus A_1)}_{\text{offen}} \cap (M \setminus A_2) \cap \cdots \cap (M \setminus A_m) \text{ ist offen.}$$

(e) Ebenso gilt:

$$M \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{M \setminus A_\lambda}_{\text{offen}} \text{ ist offen.}$$

7.3 Kompakte und vollständige Räume

7.3.1 Definition: Kompakt

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. A heißt *kompakt*, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A besitzt.

7.3.2 Satz

Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt, d. h. zu $a \in A$ existiert ein $r > 0$ mit $d(x, a) \leq r$ für alle $x \in A$.

Beweis: Sei $a \in A'$, d. h. es existiert eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$. Nach Definition ist aber $a \in A$ und damit $A' \subseteq A$. A ist abgeschlossen.
Zeigen noch: $r := \sup\{d(x, a) \colon x \in A\} < \infty$.
Es existiert ein Folge (x_n) in A mit $d(x_n, a) \to r$.
Es existiert ein konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x \in A$.
Damit ist $r = \lim\limits_{k \to \infty} d(x_{n_k}, a) = d(x, a) \in \mathbb{R}$, d. h. $r < \infty$.

7.3.3 Beispiel

Sei $M = C([a, b])$ mit $d(u, v) := \sqrt{\int\limits_a^b (u(t) - v(t))^2 \, dt} = \|u - v\|$ und $A = \{u \in C([a, b]) \colon \|u\| \leq 1\}$.
A ist beschränkt.✓

A ist abgeschlossen: Sei $u \in A'$, d. h. es gibt eine Folge $u_n \in A$ mit $u_n \to u$, u stetig ($u \in M$) und es ist

$$\|u\| = \sqrt{\int_a^b (u(t))^2 \, dt} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|u_n\|}_{\leq 1} \leq 1,$$

d. h. $u \in A$. Also ist A abgeschlossen.
A ist nicht kompakt (zeige dies hier für das Intervall $[a,b] = [-\pi,\pi]$): Setze

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sin nt.$$

Dann ist

$$\|u_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} (\sin nt)^2 \, dt = 1$$

und

$$\|u_n - u_m\|^2 = 1 + 2\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nt) \cdot (\sin mt) \, dt}_{=0 \text{ für } n \neq m} + 1 = 2$$

$$\|u_n - u_m\| = \sqrt{2}$$

keine konvergente Teilfolge u_{n_k} kann existieren, sonst

$$0 \leftarrow \|u_{n_{k+q}} - u_{n_k}\| = \sqrt{2} \text{ Widerspruch}$$

7.3.4 Satz von Bolzano-Weierstraß

(a) Im $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte und abgeschlossene Menge kompakt.

(b) Im $\mathbb{R}^n$ besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge (siehe auch 2.3.3, Seite 26).

Beweis:

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen und $(x^{(m)})$ eine Folge in A. Nach (b) existiert eine konvergente Teilfolge $(x^{(m_k)})$ mit $x^{(m_k)} \to x \in A \cup A' \overset{\otimes}{=} A$. d. h. A ist kompakt. Dabei gilt $\otimes$, da A abgeschlossen ist.

(b) Induktion nach der Dimension n:

$n = 1$: Siehe 2.3.3, Seite 26.

$n \mapsto n+1$: Sei $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.
Setze $y = (x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$. Spalte die Folgenglieder $x^{(m)}$ auf in $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, y^{(m)})$ mit $x_1^{(m)} \in \mathbb{R}$ und $y^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|y^{(m)}\|_{(\text{im } \mathbb{R}^n)} \leq \|x^{(m)}\|_{(\text{im } \mathbb{R}^{n+1})} = \sqrt{\left(x_1^{(m)}\right)^2 + \|y^{(m)}\|^2}.$$

$(y^{(m)})$ ist beschränkt im $\mathbb{R}^n$, hat also nach Induktionsvoraussetzung eine konvergente Teilfolge (y^{m_k}). Die reelle Folge $(x_1^{(m_k)})$ ist beschränkt durch $|x_1| \leq \|x\|$, d. h. es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(m_{k_j})})$. $(y^{(m_{k_j})})$ konvergiert, also konvergiert $(x^{(m_{k_j})})$ auch.

Bemerkung: Später wird einfach gesagt: „OBdA[2] sind beschränkte Folgen im $\mathbb{R}^n$ auch konvergent.“

7.3.5 Definition: Cauchyfolge, vollständig, Banachraum

Eine Folge (x_n) im metrischen Raum (M, d) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$. M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in M konvergent ist (mit Grenzwert in M). Ein normierter Raum $(E, \|.\|)$ heißt vollständig oder *Banachraum*, wenn er mit der Metrik $d(x, y)$: $\|x - y\|$ vollständig ist.

7.3.6 Beispiele/Bemerkungen

(a) Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.
Beweis: Sei $x_n \to x$. Dann ist

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ n \geq n_0}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ m \geq n_0}} < \varepsilon \text{ für } n > m \geq n_0$$

(b) $\mathbb{R}$ mit $|.|$ ist Banachraum (Cauchykriterium).

(c) $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum (vollständig mit Euklidnorm).
Beweis: Sei $(x^{(m)})$ eine Cauchyfolge. Dann ist für $\nu = 1, \ldots, n$

$$|x_\nu^{(m)} - x_\nu^{(k)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(k)}\| < \varepsilon \text{ für } m > k \geq k_0.$$

Also sind $(x_\nu^{(m)})$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ mit $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ für $m \to \infty$ und $\nu = 1, \ldots, n$.
Zusammen ist dann $x^{(m)} \to x = (x_1, \ldots, x_n)$.

(d) $C([a, b])$ mit $\|u\|_\infty = \max\limits_{a \leq t \leq b} |u(t)|$ ist ein Banachraum.
Beweis: Sei (u_n) eine Cauchyfolge, d. h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon \text{ für } n > m \geq n_0 \text{ und } a \leq t \leq b. \tag{7.1}$$

Also konvergiert u_n gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $u \in C([a, b])$.
Noch zu zeigen, daß $u_m \to u$ in der Norm: Aus 7.1 folgt:

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon.$$

Für $n \to \infty$ gilt damit

$$|u(t) - u_m(t)| \leq \varepsilon \text{ für } m \geq n_0,\ a \leq t \leq b.$$

Also ist

$$\|u - u_m\| \leq \varepsilon \text{ für } m \geq n_0,$$

d. h. $u_m \to u$ im Raum (in der Norm).

(e) $C([a, b])$ mit $\|u\| = \sqrt{\int\limits_a^b (u(t))^2\, dt}$ ist **kein** Banachraum.
Beweis: Für das Intervall $[0, 1]$: Setze

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{-1/3} & \text{für } 1/n \leq t \leq 1 \\ n^{1/3} & \text{für } 0 \leq t \leq 1/n \end{cases}.$$

[2] Soll heißen: „Ohne Bedenken des Autors.“

Sein nun $n > m$. Dann ist

$$\|u_n - u_m\|^2 = \int\limits_0^{1/m} (u_n(t) - u_m(t))^2\,dt = \int\limits_0^{1/n} (n^{1/3} - m^{1/3})^2\,dt + \int\limits_{1/n}^{1/m} (t^{-1/3} - m^{1/3})^2\,dt$$

$$\leq \frac{1}{n}\cdot(n^{1/3})^2 + \int\limits_{1/n}^{1/m} (t^{-1/3})^2\,dt = n^{-1/3} + 3t^{1/3}\Big|_{1/n}^{1/m}$$

$$< n^{-1/3} + 3\cdot m^{-1/3} < 4m^{-1/3} < \varepsilon \text{ für } m > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3.$$

Also ist (u_n) eine Cauchyfolge.
Zeige nun, daß $/u_n)$ nicht in $C([0,1])$ konvergiert.
Annahme: $\|u_n - u\| \to 0$ für $n \to \infty$ für ein $u \in C^([0,1])$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\|u_n - u\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Sei nun $\delta \in (0,1)$ beliebig und n so groß, daß $\frac{1}{n} < \delta$ ist.:

$$\int\limits_\delta^1 (t^{-1/3} - u(t))^2\,dt \leq \int\limits_0^1 (u_n(t) - u(t))^2\,dt < \varepsilon^2$$

Es ist also $u(t) = t^{-1/3}$ in $[\delta,1]$, d. h. $u(t) = t^{-1/3}$ in $(0,1]$, aber es ist $u \notin C([0,1])$. Widerspruch!
Also konvergiert u nicht in $C([0,1])$.

7.4 Stetige Funktionen

7.4.1 Definition: Stetigkeit

Es seien (M,d) und (N,ϱ) metrische Räume und $f\colon M \to N$.

(1) f heißt stetig im Punkt $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } d(x,x_0) < \delta.$$

[Äquivalent ist: $f(\underbrace{K(x_0,\delta)}_{\subseteq M}) \subseteq \underbrace{K(f(x_0),\varepsilon)}_{\subseteq N}$.]

(2) f heißt stetig (in M), wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig ist.

(3) f heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ für } x, y \in M \text{ mit } d(x,y) < \delta.$$

Vergleiche auch mit den entsprechenden Definitionen in $\mathbb{R}$: 3.2.1 auf der Seite 50 und 3.2.10 auf der Seite Seite 53.

7.4.2 Bemerkungen

(a) Sei $f\colon M \setminus \{x_0\} \to N$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 :\Longleftrightarrow \text{ zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit}$$

$$\varrho(f(x), y_0) < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } d(x,x_0) < \delta,\ x \neq x_0.$$

(b) f ist in x_0 stetig
$\iff$ für *jede* Folge (x_n) in $M \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ hat $(f(x_n))$ einen Grenzwert. Der gemeinsame Grenzwert ist dann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
(vgl. Folgenkriterium, 3.1.3 auf Seite 47)

7.4.3 Beispiel

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2+y^2} \text{ für } \alpha, \beta > 0.$$

Behauptung:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 0 \iff \alpha + \beta > 2$$

und der Grenzwert existiert nicht für $\alpha + \beta \le 2$.

Beweis: Sei $t = \max(|x|, |y|)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - 0| &= \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2+y^2} \\
&\le \frac{t^{\alpha+\beta}}{t^2} \\
&= t^{\alpha+\beta-2} \to 0 \text{ falls } \alpha+\beta-2 > 0 \text{ für } (x,y) \to (0,0)
\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha + \beta \le 2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= 0 \\
f(0,y) &= 0 \\
f(x,x) &= \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{2x^2} = \frac{1}{2}|x|^{\alpha+\beta-2} \\
&\xrightarrow{x\to 0} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \alpha+\beta = 2 \\ +\infty & \text{für } \alpha+\beta < 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Also existiert der Grenzwert nicht.

7.4.4 Komposition

Seien (M,d), (N,ϱ) und (P,σ) metrische Räume, $g\colon M \to N$ sei stetig in $x_0 \in M$ und $f\colon N \to P$ sei stetig in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist $h = f \circ g\colon M \to P$, $h(x) := f(g(x))$ stetig in x_0.

Beweis: Wie in 3.2.2 (e), Seite 50.

7.4.5 Satz

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidmetrik und $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.
f ist genau dann stetig in $\xi \in M$, wenn alle $f_\nu\colon M \to \mathbb{R}$ in ξ stetig sind.

Beweis:

„⇒“: Für $\nu = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_\nu(x) - f_\nu(\xi)| &\le \|f(x) - f(\xi)\| \\ &< \varepsilon \text{ für } \|x - \xi\| < \delta,\ x \in M \end{aligned}$$

Also ist f_ν stetig in ξ.

„⇐“:

$$\|f(x) - f(\xi)\| \le \sum_{\nu=1}^{m} \underbrace{|f_\nu(x) - f_\nu(\xi)|}_{<\varepsilon/m}$$

für $\|x - \xi\| < \delta_\nu$.
Gilt nun $\|x - \xi\| < \delta = \min\{\delta_\nu \colon \nu = 1, \ldots, m\}$, dann ist

$$\|f(x) - f(\xi)\| \le \sum_{\nu=1}^{m} |f_\nu(x) - f_\nu(\xi)| < \varepsilon.$$

7.4.6 Regeln für Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g \colon M \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in M$ und f, g stetig in ξ (in ganz M). Dann ist

(a) $f + g$

(b) λf für $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) das Skalarprodukt $f \cdot g = f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m$

stetig in ξ (in ganz M).

Beweis: Wie in $\mathbb{R}$, siehe 3.2.2 auf Seite 50.

7.4.7 Satz

Ist $A \subseteq M$ kompakt und $f \colon A \to N$ stetig, so ist $f(A) \subseteq N$ kompakt.

Beweis: Sei (y_n) Folge in $f(A)$, d. h. $y_n = f(x_n)$ mit einem $x_n \in A$. Dann ist (x_n) Folge in A und es existiert eine konvergent Teilfolge $x_{n_k} \to \xi \in A$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f für $k \to \infty$

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\xi) \in f(A).$$

7.4.8 Satz vom Minimum und Maximum

Sei $A \subseteq M$ kompakt, $f \colon A \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es $x_*, x^* \in A$ mit

$$f(x_*) \le f(x) \le f(x^*) \text{ für alle } x \in A.$$

Vergleiche auch mit 3.2.4 auf Seite 51.

Beweis: Da A kompakt ist, ist auch $B = f(A)$ kompakt. Zeige nun noch (als Aufgabe): Aus der Kompaktheit von $B \subseteq \mathbb{R}^n$ folgt $\max B \in B$ und $\min B \in B$.
Idee: Nehme Folge $b_n \in B$ mit $b_n \to \sup B$. $\sup B < \infty$? $\sup B \in B$? $\Rightarrow$ max.

7.4.9 Definition: Äquivalenz von Normen

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zwei Normen $\|.\|_\alpha$ und $\|.\|_\beta$ heißen äquivalent, wenn es $A > 0$ und $B > 0$ gibt mit

$$\|x\|_\beta \leq B\|x\|_\alpha \text{ und } \|x\|_\alpha \leq A\|x\|_\beta \text{ für alle } x \in E.$$

7.4.10 Beispiel

Sei $E = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidnorm $\|.\|$ und der Summennorm $\|.\|_1$. Dann ist

$$\|x\|_1 = \sum_{\nu=1}^{n} 1 \cdot |x_\nu| \overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|$$

und

$$\|x\| \leq \|x\|_1.$$

7.4.11 Satz

Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Beweis: Für Die Euklidnorm $\|.\|$ und eine beliebige Norm $|.|_N$.
Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ die „Oberfläche der Einheitskugel“.
Sei $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|_N$. Behauptung: f ist stetig:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\, |x|_N - |y|_N \,| \leq |x - y|_N \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - y_\nu) e^\nu \right|_N \end{aligned}$$

mit e^ν, dem ν-ten Einheitsvektor

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{|x_\nu - y_\nu|}_{a_\nu} \cdot |e^\nu|_N \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |e^\nu|_N^2}}_{=:C} \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Wähle für $\varepsilon > 0$ nun $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Dann hat f Minimum/Maximum auf S^{n-1}:

$$0 < m \leq f(x) \leq M < \infty \text{ auf } X^{n-1}.$$

$$m \cdot \|x\| \leq |x|_N \leq M \cdot \|x\| \text{ für } x \in S^{n-1}.$$

Sei nun $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Setze $\xi = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$. Dann ist $|\xi|_N \leq M$ und

$$M \geq |\xi|_N = \left|\frac{x}{\|x\|}\right|_N = \left|\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right|_N = \frac{1}{\|x\|} \cdot |x|_N,$$

also

$$|x|_N \leq M \cdot \|x\| \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ (auch für } x = 0)$$

Zeige genauso: $|x|_N \geq m \cdot \|x\|$.

7.4.12 Bemerkung

Die Begriffe „innerer Punkt“, „Häufungspunkt“, „Randpunkt“, A^0, $\bar{A}$, A', ∂A, „Konvergenz von Folgen“ und „Stetigkeit von Funktionen“ sind unabhängig definiert von der verwendeten Norm (dies gilt für alle endlich dimensionalen Räume).

7.4.13 Beispiel

Betrachte den Raum $C([a,b])$. Die Normen

$$\|u\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)| \text{ und } \|u\| = \sqrt{\int_a^b (u(t))^2 \, dt}$$

sind nicht äquivalent!

Beweis: Hier konkret für das Intervall $[a,b] = [0,1]$: Es ist

$$\|u\|^2 = \int_0^1 (u(t))^2 \, dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|^2 = \|u\|_\infty^2,$$

also ist $\|u\| \leq \|u\|_\infty$.
Dagegen ist $\|u\|_\infty \leq C \cdot \|u\|$ für alle $u \in C([0,1])$ nicht möglich.
Annahme: Ein solches festes $C > 0$ existiert doch. Setze

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{-1/3} & \text{in } [\frac{1}{n}, 1] \\ n^{1/3} & \text{in } [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

Es ist

$$\|u_n\|_\infty = n^{1/3}$$

und

$$\|u_n\|^2 < \int_0^1 t^{-2/3} \, dt = 3t^{1/3}\Big|_0^1 = 3,$$

also ist

$$\|u_n\| < \sqrt{3}$$

und es muß gelten:

$$n^{1/3} = \|u_n\|_\infty \leq C\|u_n\| < C\sqrt{3} \text{ Widerspruch!}$$

7.5 Mehr über stetige Funktionen

7.5.1 Satz von Heine

Ist $A \subseteq M$ kompakt und $f\colon A \to N$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig (vergleiche auch mit 3.2.12, Seite 54).

Beweis: Annahme: $f\colon M \to N$ $[(M,d)$ und $(N,\varrho)]$ ist nicht gleichmäßig stetig.
Zu $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ existieren die Folgen $x_n, y_n \in A$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, aber mit $\varrho(f(x_n), f(y_n)) \geq \eta > 0$.
OBdA sei (x_n) konvergent (Kompaktheit, anderenfalls wähle konvergente Teilfolge):

$$x_n \to x \in A \textbf{ und } y_n \to x.$$

$$0 < \eta \leq \varrho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{\text{Stetigkeit}} \varrho(f(x), f(x)) = 0 \text{ Widerspruch!}$$

7.5.2 Satz über die Umkehrfunktion

Sei $A \subseteq M$ kompakt, $f\colon A \to N$ sei stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1}\colon f(A) \to A$ stetig (siehe auch 3.2.9, Seite 52).

Beweis: Sei $y \in f(A)$ mit $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y)$ für jede Folge (y_n) in $f(A)$ mit $y_n \to y$.
Setze $x_n = f^{-1}(y_n)$. (x_n) ist Folge in A. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge mit $x_{n_k} \to x' \in A$. Dann ist

$$f(x') = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y.$$

Da f injektiv ist, ist $x' = x$. Dann gilt sogar (denn alle $x_{n_k} \to x$): $x_n \to x$.
Wenn f^{-1} nicht stetig sein soll, dann existiert eine Teilfolge (x_{n_j}) mit

$$d(x, x_{n_j}) \geq \eta > 0 \text{ für } j = 1, 2, 3, \ldots$$

(x_{n_j}) hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{j_k}})$, die auch Teilfolge von (x_n) ist. Damit ist $x_{n_{j_k}} \to x$ für $j \to \infty$. Also ist

$$0 < \eta \leq d(x, x_{n_{j_k}}) \to 0 \text{ Widerspruch!}$$

7.5.3 Definition

Seien $f_n, f\colon M \to N$ gegeben $(n = 1, 2, \ldots)$. f_n heißt gleichmäßig konvergent gegen f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\varrho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \textbf{ und } \text{für alle } x \in M.$$

Siehe auch 3.3.1, Seite 54.

7.5.4 Satz

Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig und sind alle f_n stetig [in $\xi \in M$ oder in M], dann ist auch f stetig (siehe auch 3.3.4, Seite 56).

Beweis: Wie bei $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

7.5.5 Banachscher Fixpunktsatz

Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T \colon M \to M$ eine *Kontraktion*, d. h. zu einem $q \in (0,1)$ ist $d(Tx,Ty) \leq q \cdot d(x,y)$ für alle $x,y \in M$.
Dann hat T genau einen Fixpunkt x^* mit $x^* = Tx^*$.
Ist $x_0 \in M$ beliebig und $x_{n+1} = Tx_n$, so ist

$$d(x_n, x^*) \leq q^n \cdot \frac{d(x_1,x_0)}{1-q},$$

insbesondere gilt $x_n \to x^*$. Man nennt (x_n) Folge der *sukzessiven Approximation.*

Beweis:

Eindeutigkeit: Sei $x = Tx$ und $y = Ty$. Dann ist

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq q \cdot d(x,y).$$

Damit ist dann

$$\underbrace{(1-q)}_{\geq 0} \cdot d(x,y) \leq 0.$$

Es ist also $d(x,y) = 0$, d. h. $x = y$.

Existenz: Sei $x_0 \in M$ und $x_{n+1} = Tx_n$. Für $n \geq 2$ gilt dann:

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Mit Induktion gilt dann: $d(x_n, x_{n-1}) \leq q^{n-1} \cdot d(x_1, x_0)$.
Sei nun $n > m$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{d(x_j, x_{j-1})}_{\leq q^{j-1} d(x_1,x_0)} \leq d(x_0,x_1) \sum_{j=m+1}^{n} q^{j-1} \\ &= d(x_0,x_1) q^m \sum_{k=0}^{n-m-1} q^k < d(x_0,x_1) q^m \cdot \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

Also ist (x_n) eine Cauchyfolge.
Gelte nun $x_n \to x^*$. Für $n > m$ gilt

$$d(x_n, x_m) < \frac{d(x_0,x_1)}{1-q} \cdot q^m$$

und für $n \to \infty$ ist dann

$$d(x^*, x_m) \leq \frac{d(x_0,x_1)}{1-q} \cdot q^m$$

Gilt nun $x^* = Tx^*$?

$$Tx^* = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{T \text{ ist stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

7.5.6 Beispiel: Fredholmsche Integralgleichung

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $k\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy \tag{7.2}$$

Gesucht ist $f \in C([a,b])$ mit (7.2).

Behauptung: Gilt $\max\{|k(x,y)|\colon a \le x,y \le b\} < \frac{1}{b-a}$, dann hat (7.2) genau eine Lösung $f \in C([a,b])$.

Beweis:

(1) Zeige: Aus $f \in C([a,b])$ folgt, daß $\tilde{f}(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy$ stetig ist in $[a,b]$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da k gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|k(x,y) - k(x',y)| < \varepsilon \text{ für } a \le y \le b,\ a \le x, x' \le b,\ |x - x'| < \delta.$$

Außerdem ist $|f(x)| \le M$ in $[a,b]$.

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')| &= \left| \int_a^b (k(x,y) - k(x',y)) f(y)\, dy \right| \le \int_a^b \underbrace{|k(x,y) - k(x',y)|}_{<\varepsilon \text{ für } |x-x'|<\delta} \cdot M\, dy \\ &< M \cdot \varepsilon (b-a) = M(b-a) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(2) Setze

$$(Tf)(x) := g(x) + \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy$$

mit $T\colon C([a,b]) \to C([a,b])$.

(3) $C([a,b])$ mit $\|f\|_\infty := \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ ist vollständig.

(4) Ist T eine Kontraktion?
Nach Voraussetzung existiert ein $q \in (0,1)$ mit $|k(x,y)| \le \frac{q}{b-a}$ für alle (x,y).
Seien $f, \varphi \in C([a,b])$:

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (T\varphi)(x)| &= \left| \int_a^b k(x,y) \cdot (f(y) - \varphi(y))\, dy \right| \\ &\le \int_a^b \underbrace{|k(x,y)|}_{\le \frac{q}{b-a}} \cdot \underbrace{|f(y) - \varphi(y)|}_{\le \|f-\varphi\|_\infty}\, dy \\ &\le \frac{q}{b-a} \|f - \varphi\|_\infty (b-a) = q \|f - \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

Also ist

$$\|Tf - T\varphi\|_\infty \le q \|f - \varphi\|_\infty$$

Die Bedingungen für den Banachschen Fixpunktsatz sind also erfüllt.
Um die Fixfunktion f^* anzunähern, wählt man ein beliebiges $f_0 \in C([a,b])$ und berechnet iterativ

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y) f_n(y)\, dy.$$

Dabei gilt als Fehlerabschätzung für $a \leq x \leq b$:

$$|f_n(x) - f^*(x)| \leq \frac{\|f_0 - f_1\|_\infty}{1-q} \cdot q^n$$

7.5.7 Beispiel: Der Satz von Picard-Lindelöf

Sei $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq L \cdot |u - \bar{u}|$$

für $a \leq t \leq b$ und $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$.
Gesucht ist die Lösung für das Anfangswertproblem (AWP)

$$u' = f(t,u),\ u(a) = \alpha.$$

Für die Lösung u gilt: $u \in C^1([a,b])$ mit

$$u'(t) = f(t,u(t)),\ u(a) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Behauptung: (AWP) hat genau eine Lösung.

Beweis: (AWP) ist äquivalent zu der Integralgleichung (IGL)

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s,u(s))\, ds,$$

denn für eine Lösung $u \in C^1([a,b])$ von (AWP) gilt:

$$\begin{aligned} u(t) - u(a) &= u(t) - \alpha \\ &= \int_a^t u'(s)\, ds \\ &= \int_a^t f(s,u(s))\, ds \end{aligned}$$

u ist also auch Lösung von (IGL).
Sei nun $u \in C([a,b])$ Lösung von (IGL):

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s,u(s))\, ds$$

Da $u \in C([a,b])$ ist, ist $f(s,u(s))$ stetig in $[a,b]$.
Also ist $\int\limits_a^b f(s,u(s))\,ds$ stetig differenzierbar, d. h. auch u ist stetig differenzierbar.
Es ist

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t,u(t)) \text{ und } u(a) = \alpha.$$

Damit ist die Äquivalenz von (AWP) und (IGL) gezeigt.
Definiere nun T mit

$$T\colon \begin{cases} C([a,b]) & \to C([a,b]) \\ (Tu)(t) & = \alpha + \displaystyle\int_a^t f(s,u(s))\,ds \end{cases}.$$

Besitzt T genau einen Fixpunkt? Versuche dies mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zu zeigen.
Definiere dazu folgende Norm auf $C([a,b])$:

$$\|u\| = \max_{a\le t\le b}\{|u(t)|\cdot\exp(-2L(t-a))\}$$

(Nachweis der Normeigenschaften als Aufgabe).
Behauptung: T ist eine Kontraktion mit $q = \frac{1}{2}$.
Seien $u, v \in C([a,b])$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t)-(Tv)(t)| &= \left|\int_a^t (f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\,ds\right| \\
&\le \int_a^t \underbrace{|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|}_{\le L|u(s)-v(s)|}\,ds \\
&\le L\int_a^t \underbrace{|u(s)-v(s)|\cdot\exp(-2L(s-a))}_{\le\|u-v\|}\cdot\exp(2L(s-a))\,ds \\
&\le L\|u-v\|\cdot\left.\frac{\exp(2L(s-a))}{2L}\right|_a^t \\
&< L\|u-v\|\cdot\frac{\exp(2L(t-a))}{2L} \\
&= \|u-v\|\cdot\frac{\exp(2L(t-a))}{2}
\end{aligned}$$

Also ist

$$|(Tu)(t)-(Tv)(t)|\cdot\exp(-2L(t-a)) < \frac{1}{2}\|u-v\|$$

und damit

$$\|Tu - Tv\| = \max\{|(Tu)(t)-(Tv)(t)|\cdot\exp(-2L(t-a))\} \le \frac{1}{2}\|u-v\|.$$

Für den Banachschen Fixpunktsatz fehlt noch die Vollständigkeit von $C([a,b])$ mit der Norm $\|.\|$.
Zeige, daß $\|.\|$ äquivalent zu $\|.\|_\infty$ ist.
Es ist

$$\|u\| \le \|u\|_\infty,$$

da $\exp(-2L(t-a)) \le 1$ in $[a,b]$. Außerdem ist

$$|u(t)| \cdot \exp(-2L(t-a)) \ge |u(t)| \cdot \underbrace{\exp(-2L(b-a))}_{=:\frac{1}{C}}$$

Damit ist

$$|u(t)| \le C|u(t)| \exp(-2L(t-a)) \le C\|u\|.$$

Da dies für $a \le t \le b$ gilt, ist

$$\|u\|_\infty \le C\|u\|.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_\infty &\le C\|u_n - u_m\| \\ \|u_n - u_m\| &\le \|u_n - u_m\|_\infty. \end{aligned}$$

Also ist der Raum vollständig, der Banachsche Fixpunktsatz kann angewendet werden, d. h. T hat genau einen Fixpunkt.

7.5.8 Konkretes Beispiel für den Satz von Picard-Lindelöf

Gesucht ist $u \in C([0,t_0])$ mit

$$u' = t + u \text{ und } u(0) = 0 \text{ in } [0,t_0] \times \mathbb{R}.$$

Hier ist $f(t,u) = t + u$.
Setze $L = 1$ und berechne u nach dem folgenden System:
Wähle $u_0 \in C([0,t_0])$ und berechne dann sukzessive

$$u_{n+1} = \int_0^t (s + u_n(s))\, ds = \frac{t^2}{2} + \int_0^t u_n(s)\, ds.$$

Speziell: Wähle $u_0(t) \equiv 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{t^2}{2} \\ u_2(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} \\ u_3(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} + \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4} \\ &\vdots \\ u_n(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{t^{n+1}}{2\cdot 3\ldots(n+1)}. \end{aligned}$$

Zeige dies für $u_n(t)$ per Induktion.
Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) & = & \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{t^j}{j!} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(t) & = & e^t - 1 - t \end{array}$$

Führe eine **Probe** durch:
Es ist $u' = e^t - 1$ und $t + u = e^t - 1$, die beiden sind also gleich. Außerdem ist $u(0) = 0$.

7.5.9 Definition

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$ und (O_λ) sein ein System von offenen Mengen mit $O_\lambda \subseteq M$ für $\lambda \in \Lambda$.
$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *offene Überdeckung* von A, wenn $A \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ ist. Gilt bereits $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} O_{\lambda_j}$ für gewisse λ_j, so heißt $(O_{\lambda_j})_{j=1,\dots,m}$ eine *endliche Teilüberdeckung.*

7.5.10 Beispiel

Sei $A = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ und $I_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$ für $n = 1,2,\dots$
Es gilt $(0,1] \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$ (Aufgabe!)
und (I_n) enthält keine endliche Teilüberdeckung, denn sonst wäre

$$(0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j}, 2\right) = \left(\frac{1}{m}, 2\right) \quad \text{Widerspruch!}$$

7.5.11 Satz von Heine-Borel

$A \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn *jede* offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen ist: (x_n) hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x \in A$.
Widerspruchsbeweis:
Sei (x_n) eine Folge in A, die keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat.
Sei $a \in A$. Dann existiert ein $r(a) > 0$, so daß

$$K(a) := K(a, r(a))$$

höchstens ein x_n enthält.
$(K(a))_{a\in A}$ ist eine offene Überdeckung von A. Es werden aber unendlich viele U_a benötigt, um $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu überdecken, also auch für A. Widerspruch!

„$\Rightarrow$“: Sei A kompakt und $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung.
Sei nun $a \in A$ und

$$r : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ r(a) & := \sup\{\varrho < 1 : K(a,\varrho) \subseteq O_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda\} \end{cases}.$$

Behauptung: r ist stetig.
Beweis: Sei $x \in A$ fest. Dann gilt $0 < \varrho < r(x)$ und $d(y,x) < r(x)$, $d(x,y) < \varrho$.
Suche nun eine Abschätzung

$$r(y) \geq ?$$

Setzt man $\delta = d(x,y)$, so gilt

$$K(y, \varrho - \delta) \subseteq K(x, \varrho) \subseteq O_\lambda.$$

Also ist

$$r(y) \geq \varrho - \delta, \ \varrho \leq r(y) + d(x,y)$$

$$\Rightarrow r(x) \leq r(y) + d(x,y)$$

$$\to r(x) - r(y) \leq d(x,y).$$

Dies gilt auch, wenn $d(x,y) \geq r(x)$ ist (trivial!).
Genauso gilt auch

$$r(y) - r(x) \leq d(x,y).$$

Damit gilt dann:

$$|r(x) - r(y)| \leq d(x,y) \text{ Bedingung für die Stetigkeit}$$

Also ist r stetig.
Da A kompakt ist, hat r ein positives Minimum$= 2 \cdot r_0$.
Zu jedem $x \in A$ existiert ein λ mit

$$K(x, r_0) \subseteq O_\lambda$$

Also ist $(K(x, r_0))_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A.
Zeige nun noch, daß $(K(x, r_0))_{x \in A}$ eine endliche Teilüberdeckung enthält und damit auch (O_λ) selbst.
Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung.
Sei $x_0 \in A$ beliebig. dann existieren: $x_1 \in A \setminus K(x_0, r_0)$
$x_2 \in A \setminus (K(x_0, r_0) \cup K(x_1, r_0))$
$\vdots$
$x_n \in A \setminus (K(x_0, r_0) \cup \cdots \cup K(x_{n-1}, r_0))$.
(x_n) ist eine Folge in A.
Für $n > m$ gilt dann $d(x_n, x_m) \geq r_0$ und $x_n \neq K(x_m, r_0)$.
Es gibt also keine konvergente Teilfolge in A. Widerspruch!
Also enthält $(K(x, r_0))_{x \in A}$ eine endliche Teilüberdeckung und (O_λ) enthält ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung.

7.6 Zusammenhang

In diesem Abschnitt ist (M, d) ein metrischer Raum, insbesondere meistens $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik oder $\mathbb{R}$ mit dem absoluten Betrag $|.|$.

7.6.1 Definition: Partition, zusammenhängend

Sei $E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$ und $A, B \subseteq M$.
(A, B) heißt *Partition* von E, wenn gilt:

(1) A und B sind offen

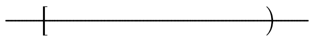
(2) $E \subseteq A \cup B$

(3) $E \cap A \cap B = \emptyset$

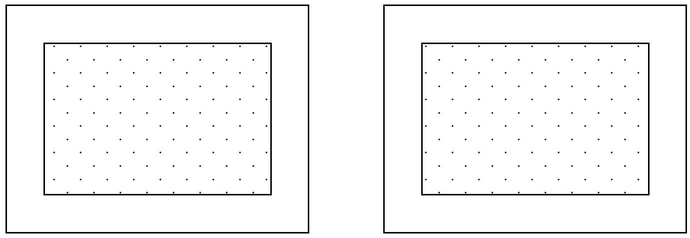
(4) $E \cap A \neq \emptyset$ und $E \cap B \neq \emptyset$.

E heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Partition von E gibt.

7.6.2 Anschauliche Beispiele

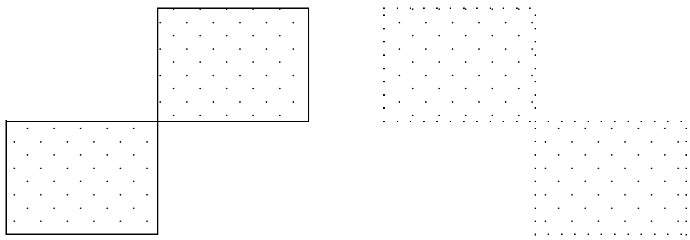
(a) Intervall in $\mathbb{R}$: 

(b)



Die hier gezeigte Menge ist nicht zusammenhängend.

(c)



Mit Rand zusammenhängend | Ohne Rand nicht zusammenhängend

7.6.3 Bemerkung

In der Definition des Zusammenhanges kann man „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzen.

Beweis: Setze $\tilde{A} = M \setminus A$ und $\tilde{B} = M \setminus B$.
$\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind offen, wenn A und B abgeschlossen sind.
(A, B) ist Partition von E; A und B sind abgeschlossen.
Zeige: $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ist Partition von E.

$(\tilde{1})$ $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind offen✓

$(\tilde{2})$ Es gilt $E \subseteq A \cup B$, $E \nsubseteq A$ und $E \nsubseteq B$ (wegen (3), (4))
$\Rightarrow E \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$, denn

$$x \in E \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in \tilde{B} \\ x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \tilde{A} \end{cases}$$

$(\tilde{3})$ Sei $x \in E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}$.
Dann ist $x \in E$, $x \notin A$ und $x \notin B$.
Das heißt, es gibt ein $x \in E$ mit $x \notin A$ und $x \notin B$.
Dies ist ein Widerspruch zu (2), also kann es so ein x nicht geben.

($\tilde{4}$) Sei $E \cap \tilde{A} = \emptyset$ und sei $x \in E$.
Dann ist $x \in M \setminus \tilde{A} = A$ für alle $x \in E$.
Das heißt, daß $E \subseteq A$ ist. Widerspruch zu (3) und (4),
da $\emptyset \neq E \cap B \subseteq E \cap A \cap B$ Widerspruch zu (3).

7.6.4 Definition: Gebiet

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

7.6.5 Satz

Ist $f\colon E \to N$ [(N, ϱ) sei dabei ein metrischer Raum] stetig und E zusammenhängend, so ist $f(E)$ zusammenhängend.

Beweis: Annahme: $(\tilde{A}, \tilde{B})$ sei Partition von $f(E)$.
Zu $y = f(x) \in \tilde{A}$ und zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f(K(x,\delta) \cap E) \subseteq K(y,\varepsilon),\ \delta = \delta(\varepsilon, x) = \delta(x) \text{ für festes } \varepsilon$$

$$A = \bigcup_{f(x)\in\tilde{A}} \underbrace{K(x,\delta(x))}_{\text{offen}} \text{ ist offene Menge}$$

Genauso:

$$B = \bigcup_{f(x)\in\tilde{B}} \underbrace{K(x,\delta(x))}_{\text{offen}} \text{ ist offene Menge}$$

Ist (A, B) Partition von E?

(1) A und B sind offen✓

(2) ✓ nach Konstruktion

(3) Sei $x \in E \cap A \cap B$
Dann ist $f(x) \in \tilde{A}$ und $f(x) \in \tilde{B}$
Also ist $\tilde{A} \cap \tilde{B} \neq \emptyset$
Daraus folgt, daß $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap f(E) \neq \emptyset$ ist. Widerspruch zu ($\tilde{3}$)
Also ist $E \cap A \cap B = \emptyset$.

(4) Wäre $E \cap A = \emptyset$, also $E \subseteq B$,
dann wäre $\tilde{B} \supseteq f(B \cap E) = f(E)$. Widerspruch! zu ($\tilde{3}$) und ($\tilde{4}$)
Also ist $E \cap A \neq \emptyset$ und genauso $E \cap B \neq \emptyset$

Zusammen ist (A, B) damit Partition von E. Widerspruch! zu: E ist zusammenhängend. Es gibt also keine Partition von $f(E)$, d. h. $f(E)$ ist zusammenhängend.

7.6.6 Zwischenwertsatz

Eine Menge E ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}$ die Zwischenwerteigenschaft hat, d. h. wenn $f(E)$ ein Intervall ist.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Sei E nicht zusammenhängend und (A, B) Partition von E.
Setze

$$f\colon E \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \in E \cap A \\ 1 & x \in E \cap B \end{cases}$$

$$f(E) = \{0, 1\}$$

Behauptung: f ist stetig.
Sei z. B. $x_0 \in A \cap E$, $f(x_0) = 0$.
Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x_0, \delta) \subseteq A$, da A offen ist.
In $K(x_0, \delta) \cap E$ ist $f(x) = 0$, also ist f stetig in x_0.
Da $f(E) = \{0, 1\}$ kein Intervall ist, aber nach Voraussetzung ein Intervall sein muß, erhält man einen Widerspruch!
$\Rightarrow$ E ist doch zusammenhängend.

„$\Rightarrow$“: Sei E zusammenhängend, $f\colon E \to \mathbb{R}$ stetig, aber $f(E)$ kein Intervall.
Dann gibt es $a < b$ mit $a, b \in f(E)$, aber $c \in (a, b)$ mit $c \notin f(E)$.
Setze damit

$$A = \{x\colon f(x) < c\} \text{ und } B = \{x\colon f(x) > c\}.$$

A und B sind offen. Überprüfe die Definition für die Partition (A, B):

(1) ✓

(2) ✓, da $f(x) \neq c$ für alle $x \in E$.

(3) ✓, da sogar $A \cap B \neq \emptyset$.

(4) Es gibt α mit $f(\alpha) = a$: Es ist $\alpha \in A$.
Es gibt β mit $f(\beta) = b$: Es ist $\beta \in B$.

Zusammen ist damit (A, B) eine Partition der zusammenhängenden Menge E. Widerspruch!
Also ist $f(E)$ ein Intervall.

7.6.7 Satz

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und setze $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann ist nach dem Zwischenwertsatz $f(E) = E$ ein Intervall.

„$\Leftarrow$“: Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon E \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist nach Ana I $f(E)$ ein Intervall und mit dem Zwischenwertsatz ist damit E zusammenhängend.

7.6.8 Hilfssatz

Seien E_λ für $\lambda \in \Lambda$ zusammenhängende Mengen (in M), $E_\lambda \cap E_\nu \neq \emptyset$ für je zwei $\lambda, \nu \in \Lambda$. Dann ist auch $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda =: E$ zusammenhängend.

Beweis: Annahme: E ist nicht zusammenhängend, (A, B) Partition von E, insbesondere

$$E_\lambda \subseteq A \cup B$$

$$E_\lambda \cap A \cap B \subseteq E \cap A \cap B = \emptyset$$

Da E_λ zusammenhängend ist, ist (A, B) keine Partition von E_λ. Also ist $E_\lambda \subseteq A$ oder $E_\lambda \subseteq B$. Sei hier $E_\lambda \subseteq A$.
Sei $\mu \neq \lambda$. Dann ist $E_\mu \subseteq A$ oder $E_\mu \subseteq B$ und $E_\lambda \cap E_\mu \neq \emptyset$.
Damit ist $E_\mu \cap A \neq \emptyset$.
Dann kann $E_\mu \subseteq B$ nicht gelten, da $E_\mu \cap A \cap B = \emptyset$ ist, also ist $E_\mu \subseteq A$.
Zusammen ist dann $E \subseteq A$. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß (A, B) Partition von E ist, also ist E zusammenhängend.

7.6.9 Beispiel

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich 0, d. h. für jedes $x \in E$ gilt:

$$\{tx\colon 0 \leq t \leq 1\} \subseteq E.$$

Behauptung: E ist zusammenhängend, also ein Gebiet.

Beweis: Sei für $x \in E$

$$S_x = \{tx\colon 0 \leq t \leq 1\}.$$

Die Funktion

$$[0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto tx$$

ist stetig. Damit ist S_x zusammenhängend. Außerdem ist

$$E = \bigcup_{x \in E} S_x \text{ und } S_x \cap S_y \supseteq \{0\}.$$

Also ist E zusammenhängend.

7.6.10 Satz

Sei $E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$. Dann ist

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \text{„es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } F \subseteq E \text{ mit } x, y \in F\text{“}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen $[x]$ sind zusammenhängend. Entweder ist $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$. Jede Klasse $[x]$ heißt *Zusammenhangskomponente* von E. Es gilt:

$$E = \bigcup_x [x]$$

Beweis: Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

(1) Reflexivität: Ist $x \sim x$? Ja, da $x, x \in \{x\}$ =zusammenhängende Teilmenge.

(2) Symmetrie:

$$\begin{aligned} x \sim y \quad &\Rightarrow \quad x, y \in F \subseteq E,\ F \text{ zusammenhängend} \\ &\Rightarrow \quad y, x \in F \subseteq E,\ F \text{ zusammenhängend} \\ &\Rightarrow \quad y \sim x \end{aligned}$$

(3) Transitivität:
Sei $x \sim y$ und $y \sim z$, d. h.
$x, y \in F_1 \subseteq E$ und $y, z \in F_2 \subseteq E$,
F_1 und F_2 sind zusammenhängend.
$x, z \in F_1 \cup F_2 \subseteq E$
$y \in F_1 \cap F_2$, also ist $F_1 \cup F_2$ zusammenhängend.
Also ist $x \sim z$.

7.6.11 Bemerkung

Zusammenhangskomponenten sind automatisch maximal zusammenhängend, d. h. ist $F \subseteq E$ zusammenhängend, dann existiert eine Zusammenhangskomponente C mit $F \subseteq C$.

Beweis: Sei $x \in F$, $C = [x]$.
Für $y \in F$ ist dann $x \sim y$, also $y \in [x] = C$, $F \subseteq C$.

7.6.12 Zusatz

Ist $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen [abgeschlossen], dann ist auch jede Zusammenhangskomponente offen [abgeschlossen].
Eine offene Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen Gebieten.

Beweis: Zuerst für offenes E:
Sei C Zusammenhangskomponente von E.
Sei $x \in C$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x, \delta) \subseteq E$, da $K(x, \delta)$ zusammenhängend ist und x enthält.
Da C maximal zusammenhängend ist, folgt $K(x, \delta) \subseteq C$. Zeige nun, daß es nur endlich oder abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten gibt:
Sei C eine Zusammenhangskomponente von E.
C enthält $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_\nu \in \mathbf{Q}$ für $\nu = 1, \ldots, n$.
Nenne $x = x_C$ und definiere die Abbildung

$$\{C : C \text{ ist Komponente von } E\} \to \mathbf{Q}^n \; C \mapsto x_C.$$

Diese Abbildung ist injektiv, da je zwei Komponenten disjunkt (oder gleich) sind. Da aber $\mathbf{Q}^n$ abzählbar ist, existieren höchstens abzählbar viele Komponenten.
Nun der Beweis für abgeschlossenes E:
Sei C Zusammenhangskomponente von E.
Zu zeigen ist, daß C abgeschlossen ist, d. h. $C = \bar{C}$. Es gilt:

(1) $\bar{C} \subseteq E$, da E abgeschlossen ist.

(2) $\bar{C}$ ist zusammenhängend (Dies wird gleich gezeigt).

Zusammen ist also $C \subseteq \bar{C} \subseteq E$, also auch $C = \bar{C}$.
Zeige nun, daß (2) gilt:
Wenn $\bar{C}$ nicht zusammenhängen ist, existiert eine Partition (A, B) von $\bar{C}$ mit:

(1) Aund B sind offen.

(2) $\bar{C} \subseteq A \cup B$.

(3) $\bar{C} \cap A \cap B = \emptyset$.

(4) $\bar{C} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{C} \cap B \neq \emptyset$.

Da $C \subseteq A \cup B$ und $C \cap A \cap B = \emptyset$ und C zusammenhängend ist, folgt: $C \cap A = \emptyset$ [oder $C \cap B = \emptyset$], also ist z. B. $C \subseteq B$.
Andererseites existiert ein $a \in \bar{C} \cap A$. Da $A \subseteq C$ ist, ist $a \in C'$,
d. h. es existiert eine Folge (c_n) in C mit $c_n \to a$, $c_n \neq a$.
Also existiert eine Kugel $K(a, \delta) \subseteq A$.
Für $n \geq n_0$ gilt dann:

$$c_n \in K(a, \delta) \subseteq A$$

und

$$c_n \in C \subseteq B.$$

Damit ist dann $c_n \in C \cap A \cap B = \emptyset$. Widerspruch!
Also ist $\bar{C}$ zusammenhängend.

7.6.13 Testbeispiel

Sei Λ Indexmenge und I_λ seien für $\lambda \in \Lambda$ offene Intervalle.
Setze

$$E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subseteq \mathbb{R}.$$

E besteht nach dem Satz aus höchstens Abzählbar vielen Intervallen (Komponenten).

7.6.14 Definition: Weg

M sei ein metrischer Raum, $E \subseteq M$.
Eine stetige Abbildung

$$\gamma \colon [\alpha, \beta] \to E$$

heißt *Weg* in E. $\gamma(\alpha)$ heißt *Anfangspunkt*, $\gamma(\beta)$ heißt *Endpunkt* von γ.
Man sagt γ verbindet $\gamma(\alpha)$ mit $\gamma(\beta)$ in E.
Beachte:

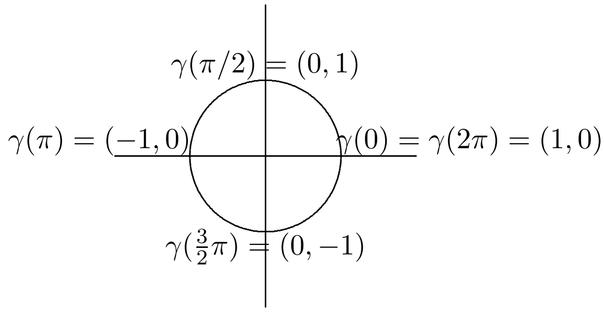
$$|\gamma| := \{\gamma(t) \colon \alpha \leq t \leq \beta\} \subseteq E$$

ist zusammenhängend, $|\gamma|$ heißt *Träger* von γ.

7.6.15 Beispiel

Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



7.6.16 Definition: Wegzusammenhang

$E \subseteq M$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu $a, b \in E$ einen Weg γ gibt, der a mit b in E verbindet.

7.6.17 Beispiel

Dies gilt zum Beispiel für konvexe und sternförmige Mengen.

7.6.18 Satz

Wegzusammenhängende Mengen sind immer zusammenhängend.

Beweis: Sei E wegzusammenhängend und $a \in E$ fest.
Zu jedem $x \in E$ existiert ein Weg γ_x in E, der in a beginnt und in x endet, $|\gamma_x|$ ist zusammenhängend, $|\gamma_x| \cap |\gamma_y| \supseteq \{a\}$. Also ist $E = \bigcup\limits_{x \in E} |\gamma_x|$ zusammenhängend.

7.6.19 Beispiel/Aufgabe

Seien

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\} \\ E_2 &= \{(0, y)\colon -1 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

Weise nach: E_1 und E_2 sind wegzusammenhängend, $E_1 \cup E_2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Z. B. existiert kein Weg von $(0,0)$ zu $(1, \sin 1)$.

7.6.20 Satz

Jedes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend. (Gebiet=offen und wegzusammenhängend)

Beweis: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $a \in E$ sei fest. Setze
$A = \{x \in E\colon$ es gibt einen (achsenparallelen) Weg in E von a nach $x\}$
$B = E \setminus A$.

1. Zeige: A ist offen! Sei $x \in A$.
   Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x, \delta) \subseteq E$. Es existiert ein Weg γ_x von a nach x mit $|\gamma_x| \subseteq E$.
   Sei $y \in K(x, \delta)$: γ_x verlängert um die Strecke von x nach y ist ein Weg von a nach y in E.
   D. h. $y \in A$, also $K(x, \delta) \subseteq A$. Also ist A offen, da $x \in A$ beliebig ist.
2. $A \neq \emptyset$, da $a \in A$.
3. Zeige: B ist offen!
   Es ist $B = \{x\colon$ es existiert *kein* Weg von a nach x in $E\}$.
   Sei $x \in B$, $\delta > 0$, so daß $K(x, \delta) \subseteq E$ ist.
   Wäre $y \in K(x, \delta)$ von a aus erreichbar durch einen Weg γ_x, so auch x durch γ_y, verlängert um die Strecke von y nach x. Also ist B offen. Daraus folgt
4. $E = A \cup B$. Dabei sind A und B offen, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ und $A \cap B \cap E = \emptyset$, da E zusammenhängend ist. Also ist $B = \emptyset$, da $a \in A$ ist.

Gezeigt: Jedes $x \in E$ ist Endpunkt eines Weges in E, der in a beginnt.
Desgleichen gilt auch für achsenparallele Streckenzüge.

7.7 Gleichgradige Stetigkeit

7.7.1 Definition: gleichgradig stetig

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ sei eine Menge (Familie) von Funktionen $f\colon E \to \mathbb{R}^m$. $\mathcal{F}$ heißt

(a) *beschränkt*, wenn es ein $M > 0$ gibt mit $\|f(x)\| \leq M$ für alle $x \in E$ und für alle $f \in \mathcal{F}$.

(b) *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Ist $x, y \in E$, $\|x - y\| < \delta$, so ist
$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \text{ für alle } f \in \mathcal{F}.$$

7.7.2 Beispiele

(a) Ist für alle $f \in \mathcal{F}$ und $x, y \in E$
$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|,$$
wobei L unabhängig von f, x und y ist, so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig. Setze dabei $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$.

(b) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f_k\colon E \to \mathbb{R}^m$ stetig und $f_k \to f$ gleichmäßig in E.
Behauptung: $\mathcal{F} = \{f_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig.
Beweis: Da alle f_k gleichmäßig konvergieren, ist f stetig.
Da aber auch E kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig.

Also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\sigma > 0$ mit
$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } x, y \in E,\ \|x - y\| < \sigma.$$
Weiter existiert ein k_0 mit
$$\|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für} k \geq k_0,\ x \in E.$$

Für $1 \le k \le k_0$ existiert ein δ_k mit

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon \text{ für } x, y \in E,\ \|x - y\| < \delta_k.$$

Setze $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_{k_0}, \sigma) > 0$. Für $\|x - y\| < \delta$ gilt dann:

$$\|f_k(x) - f_k(x)\| < \varepsilon \text{ ist erfüllt für } k \le k_0.$$

Sei nun $k \ge k_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|f_k(x) - f_k(y)\| &= \|f_k(x) - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - f_k(y)\| \\ &\le \underbrace{\|f_k(x) - f(x)\|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{glm. Konv.}}} + \underbrace{\|f(x) - f(y)\|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{glm. Stetigkeit}}} + \underbrace{\|f(y) - f_k(y)\|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{glm. Konv.}}} < \varepsilon\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.
Aufgabe: Zeige, daß $\mathcal{F}$ beschränkt ist.

7.7.3 Satz von Arzela-Ascoli

Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen und beschränkt oder der Abschluß einer offenen und beschränkten Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$) und $\mathcal{F}$ sei beschränkt und gleichgradig stetig.
Dann hat jede Folge (f_k) in $\mathcal{F}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis:

(a) Teilfolgenauswahl nach dem Cantorschen Diagonalverfahren.
$E \cap \mathbf{Q}^n$ ist eine abzählbare Menge, dicht, d. h. $\overline{E \cap \mathbf{Q}^n} = \bar{E} = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \ldots\}$
1.: $(f_k(\xi^1))$ ist beschränkt (im $\mathbb{R}^m$): es ex. TF $(f_{1,k}(\xi^1))$
2.: $(f_{1,k}(\xi^2))$ ist beschränkt (im $\mathbb{R}^m$): es ex. TF $(f_{2,k}(\xi^2))$
$\vdots$
ℓ.: $(f_{\ell-1,k}(\xi^l))$ ist beschränkt (im $\mathbb{R}^m$): es ex. TF $(f_{\ell,k}(\xi^\ell))$. Wir haben also:

$$\begin{array}{ccccc} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Wähle nun $\varphi_k := f_{k,k}$.
(φ_k) ist Teilfolge von (f_k).
$(\varphi_k)_{k \ge l}$ ist Teilfolge von $(f_{\ell,k})$.
$\varphi_k(\xi^\ell)$ ist Teilfolge von $(f_{\ell,k}(\xi^\ell))$,
d. h. $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(\xi^\ell)$ existiert für alle $l = 1, 2, \ldots$

(b) Konvergenzbeweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)\| < \varepsilon \text{ für } x, y \in E,\ \|x - y\| < \delta \text{ und für alle } k \in \mathbb{N}$$

(gleichgradige Stetigkeit).
Sei $D_j = K(\xi^j, \delta)$:

$$E \subseteq \bar{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \text{ (da } \{\xi^j\} \text{ dicht ist).}$$

Da $\bar{E}$ kompakt ist, gibt es ein p mit

$$\bar{E} \subseteq D_1 \cup \cdots \cup D_p \text{ (Heine-Borel).}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Index k_0 mit

$$\begin{aligned}\|\varphi_k(x) - \varphi_\ell(x)\| &= \|\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi^j) + \varphi_k(\xi^j) - \varphi_\ell(\xi^j) + \varphi_\ell(\xi^j) - \varphi_\ell(x)\| \\ &\leq \|\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi^j)\| + \|\varphi_k(\xi^j) - \varphi_\ell(\xi^j)\| + \|\varphi_\ell(\xi^j) - \varphi_\ell(x)\| \\ &< \underbrace{\varepsilon}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon}_{(2)} + \underbrace{\varepsilon}_{(3)} = 3\varepsilon\end{aligned}$$

Dabei gilt:
(1), da $\|x - \xi^j\| < \delta$ für alle k (gleichgradige Stetigkeit)
(3), da $\|x - \xi^j\| < \delta$ für alle l (gleichgradige Stetigkeit)
(2), da $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\xi^j)$ existiert.
Also ist das Cauchykriterium erfüllt, es liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

7.7.4 Beispiel: Existenzsatz von Peano

Sei $S = [a,b] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt.
Gesucht ist u mit

$$u' = f(t,u) \text{ und } u(a) = \alpha. \tag{7.3}$$

Das Anfangswertproblem (7.3) hat mindestens eine Lösung in $[a,b]$, d. h.

$$u \in C^1([a,b]),\ u(a) = \alpha \text{ und } u'(t) = f(t,u(t)).$$

Äquivalent zu diesem Problem ist

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s,u(s))\,ds \text{ mit } u \in C([a,b]).$$

Beweis: Setze

$$u_n(t) = \alpha \text{ in } [a-1,a]$$

und

$$u_n(t) = \alpha + \int_a^t f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \text{ in } (a,b].$$

Behauptung: $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig.
Dann existiert eine Teilfolge $u_{n_k} \to u$ gleichmäßig in $[a,b]$.
Für $|u_n(t)| \leq K$ ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b] \times [-K,K]$

$$f\left(s, u_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) \xrightarrow{\text{glm.}} f(s,u(s)).$$

$$\begin{array}{ccl} u_{n_k}(t) & = & \alpha + \displaystyle\int_a^t f\left(s, u_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) ds \\ \downarrow & & \ \ \downarrow \\ u(t) & = & \alpha + \displaystyle\int_a^t f(s,u(s))\,ds \end{array}$$

Beweis der Beschränktheit: Es gilt: $|f(t,u)| \leq M$ in S.

$$u_n(t) \leq |\alpha| + \int_a^t M\, ds \leq |\alpha| + M(b-a) =: K \text{ für } a \leq t \leq b.$$

Beweis der gleichgradigen Stetigkeit: Sei $\tau < t$. Dann ist

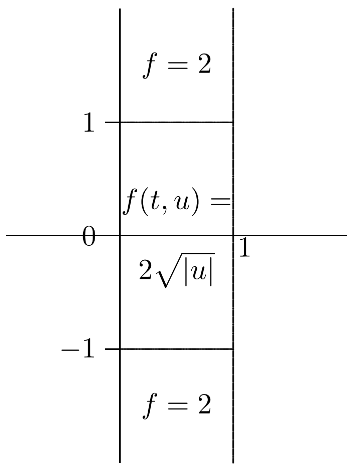
$$\begin{aligned}|u_n(t) - u_n(\tau)| &= \left| \int_a^t f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds - \int_a^\tau f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \right| \\ &= \left| \int_\tau^t \underbrace{f(s, u_n(s - \frac{1}{n}))}_{|.| \leq M} ds \right| \leq M \cdot (t - \tau) \text{ Lipschitzbedingung für } u_n\end{aligned}$$

Also sind die u_n gleichgradig stetig.

7.7.5 Beispiel für den Existenzsatz von Peano

Beispiel mit mehreren Lösungen:
Sei $S = [0,1] \times \mathbb{R}$ und f wie folgt definiert:

$$f(t,u) = \begin{cases} 2 & \text{für } u > 1 \\ 2\sqrt{|u|} & \text{für } -1 < u < 1 \\ 2 & \text{für } u < -1 \end{cases}$$



Gesucht ist ein u mit

$$u' = f(t,u) \text{ und } u(0) = 0.$$

Eine Lösung ist

$$u(t) = 0.$$

Eine andere Lösung ist

$$u(t) = t^2.$$

Die weiteren Lösungen sind

$$u(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \tau \\ (t-\tau)^2 & \tau \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

8 Mehrdimensionale Differentialrechnung[1]

8.1 Matrizen und quadratische Formen

8.1.1 Definition: Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ist eine $m \times n$-Matrix mit $a_{\mu,\nu} \in \mathrm{I\!R}$.
m ist die Zahl der Zeilen: $\begin{pmatrix} a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \dots & a_{\mu,n} \end{pmatrix}$ ist eine $1 \times n$-Matrix.

n ist die Zahl der Spalten: $\begin{pmatrix} a_{1,\nu} \\ a_{2,\nu} \\ \vdots \\ a_{m,\nu} \end{pmatrix}$ ist eine $m \times 1$-Matrix.

8.1.2 Rechenregeln für Matrizen

1. Für $C := A + B$ gilt: $c_{\mu,\nu} := a_{\mu,\nu} + b_{\mu,\nu}$.
2. Für $C := \lambda A$ gilt: $c_{\mu,\nu} := \lambda_{\mu,\nu}$.
3. Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann ist $C := A \cdot B$ eine $m \times p$-Matrix mit

$$c_{\mu,\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} b_{\nu,\varrho}$$

für $\mu = 1, \dots, m$ und $\varrho = 1, \dots, p$.

8.1.3 Transponierte Matrizen

Die Transponierte von A (siehe oben) ist

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & & a_{m,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Wenn $x \in \mathrm{I\!R}^n$ ist, wird oft

$$x^T = (x_1, \dots, x_n)$$

[1]Version 4.8 vom 19. Dezember 2002

geschrieben. Dies ist als Spaltenvektor gemeint:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

8.1.4 Skalarprodukt

$$x^T y = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = x \cdot y$$

ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

8.1.5 Matrizennorm

Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\|.\|_n$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|_m$ eine Norm im $\mathbb{R}^m$. Dann ist

$$\|A\| := \sup\{\|A \cdot x\|_m \colon x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_n = 1\}$$

die von $\|.\|_n$ und $\|.\|_m$ erzeugte Matrixnorm.
Beachte:

$$\|Ax\|_m \le \|A\| \cdot \|x\|_n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

8.1.6 Beispiele

(1) Beidesmal die Euklidnorm: Zeige (als Aufgabe)

$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=1,\dots,n}} a_{\mu,\nu}^2}.$$

(2) Beidesmal Maximumnorm:
Für $y = Ax$ ist

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} |y_\mu| &\le \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu,\nu}| \cdot \underbrace{|x_\nu|}_{\le \|x\|_\infty} \\ &\le \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu,\nu}| \right) \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Also ist

$$\|y\|_\infty \le \left(\max_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu,\nu}| \right) \cdot \|x\|_\infty$$

Es ist damit

$$\|A\| \overset{(*)}{\leq} \max_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu,\nu}|.$$

Zeige, daß für $(*)$ Gleichheit gilt:
Sei

$$\max_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu,\nu}| = \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\varrho,\nu}|$$

Setze

$$x_\nu = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_{\varrho,\nu} \geq 0 \\ -1 & \text{wenn } a_{\varrho,\nu} < 0 \end{cases}.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho,\nu} x_\nu \right| = \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\varrho,\nu}| \cdot \underbrace{\|x\|_\infty}_{=1}$$

und damit

$$\|A\| \overset{\odot}{\geq} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\varrho,\nu}.$$

Aus $\odot$ und $(*)$ folgt insgesamt die Gleichheit bei $(*)$.

8.1.7 Definition: Quadratische Formen

Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix ($A = A^T$, $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$). Dann heißt

$$Q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ Q_A(x) := x^T A x = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\mu x_\nu$$

quadratische Form.

8.1.8 Bemerkung

Wenn $A^T = A$ ist, sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reell. Man kann die Eigenvektoren $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ orthonormal wählen, d. h. es gilt

$$x^{(j)} \cdot x^{(k)} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}.$$

$x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x^{(j)} \text{ und } Ax = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j x^{(j)}.$$

Damit ist

$$x^T A x = x \cdot (Ax) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2.$$

8.1.9 Definition: positiv/negativ (semi-)definit

A heißt

$$\left.\begin{array}{c}\text{positiv definit}\\ \text{negativ definit}\\ \text{positiv semidefinit}\\ \text{negativ semidefinit}\\ \text{indefinit}\end{array}\right\} \iff x^TAx\begin{cases}>0 & \text{für } x\neq 0\\ <0 & \text{für } x\neq 0\\ \geq 0 & \text{für } x\neq 0\\ \leq 0 & \text{für } x\neq 0\\ \text{sonst}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\text{alle } \lambda_j>0\\ \text{alle } \lambda_j<0\\ \text{alle } \lambda_j\geq 0\\ \text{alle } \lambda_j\leq 0\\ \text{mind. ein } \lambda_j>0, \text{ ein } \lambda_j<0\end{cases}$$

8.1.10 Bemerkungen

A ist positiv definit („$A > 0$“)

$$\iff \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k_1} & \dots & a_{kk}\end{vmatrix} > 0 \text{ für } k = 1, 2, \dots, n,$$

bzw. negativ definit („$A < 0$“)

$$\iff (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{vmatrix} > 0 \text{ für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Es gilt $A > 0 \iff (-A) < 0$.
Ohne Beweis.
Insbesondere ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & c\end{smallmatrix}\right)$ genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $ac > b^2$, bzw. genau dann negativ definit, wenn $a < 0$ und $ac > b^2$ ist.

8.1.11 Beispiele

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix} \text{ ist positiv semidefinit, d. h. } A \geq 0.$$

$$x^TAx = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} x_\mu x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2 \geq 0$$

$$\text{„} = 0\text{“} \iff \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = 0$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_A(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{„} = 0\text{“} &\Leftrightarrow x_3 = 0 \wedge x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; A > 0. \end{aligned}$$

8.1.12 Definition: Landau-Symbole

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$, ξ Häufungspunkt von E, $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^m$ und $\psi\colon E \to \mathbb{R}$.

(a) $\varphi(x) = O(\psi(x))$ für $x \to \xi$ bedeutet:
Es gibt ein $C > 0$ und ein $\delta > 0$ mit

$$\|\varphi(x)\| \leq C\psi(x) \text{ in } x \in E,\ 0 < \|x - \xi\| < \delta.$$

(b) $\varphi(x) = o(\psi(x))$ für $x \to \xi$ bedeutet:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|\varphi(x)\| \leq \varepsilon\psi(x) \text{ in } x \in E,\ 0 < \|x - \xi\| < \delta.$$

8.1.13 Beispiele

1. Sei $\varphi(x) = x^T Ax$.
   Es gilt: $\phi(x) = O(\|x\|^2)$ für $x \to 0$.
   Äquivalent ist: $|x^T Ax| \leq C\|x\|^2$ für $\|x\| < \delta$.

$$\begin{aligned} |x^T Ax|^2 &= |x \cdot (Ax)|^2 \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 \cdot \|(Ax)\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 \cdot (C\|x\|^2) = C^2\|x\|^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x^T Ax\| \leq C\|x\|^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Sei $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ stetig in $\xi \in E$.
   $\Leftrightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} &\|f(x) - f(\xi)\| < \varepsilon \text{ für } \|x - \xi\| < \delta,\ x \in E \\ \Leftrightarrow\ & f(x) - f(\xi) =: \tilde{\varphi}(x) \text{ mit } \widetilde{\varphi(x)} \to 0 \text{ für } x \to \xi \\ \Leftrightarrow\ & f(x) - f(\xi) = o(1) \text{ für } x \to \xi \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = f(\xi) + o(1) \text{ für } x \to \xi \end{aligned}$$

8.1.14 Regeln für Landau-Symbole

(Die Regeln unter (a) und (b) gelten sowohl für O als auch für o.)

(a) Sei $\varphi_j(x) = O(\psi(x))$ für $x \to \xi$ und $j = 1, \dots, k$.
Dann ist
$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) = O(\psi(x)) \text{ für } x \to \xi.$$
Anwendungsbeispiel:
Seien f_1 und f_2 stetig in ξ. Dann ist $f_1 + f_2$ stetig in ξ,
denn: $f_j(x) = f_j(\xi) + o(1)$ für $j = 1, 2$.
$$f_1(x) + f_2(x) = f_1(\xi) + f_2(\xi) + o(1)$$

(b) Sei $\varphi_j(x) = O(\psi(x))$ für $x \to \xi$ und $j = 1, \dots, k$.
Dann gilt
$$\varphi(x) = \max_1^k \|\varphi_j(x)\| \ \Rightarrow\ \varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ für } x \to \xi$$

(c) Gilt $\varphi(x) = o(\psi(x))$ für $x \to \xi$, dann ist auch $\varphi(x) = O(\psi(x))$ für $x \to \xi$. Dies gilt i. A. aber nicht umgekehrt.

8.1.15 Beispiel

Sei $f \in C^k(-r, r)$. Dann ist für $x \to 0$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \begin{cases} o(|x|^k) & \text{, falls } f \in C^k(-r,r) \\ O(|x|^{k+1} & \text{, falls } f \in C^{k+1}(-r,r) \end{cases}$$

8.2 Differenzierbare Funktionen

Für diesen Abschnitt ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.
Funktionen $D \to \mathbb{R}^m$ werden üblicherweise mit $f, g, \psi, \varphi, \dots$ bezeichnet.
Funktionen $D \to \mathbb{R}$ werden üblicherweise mit $u, v, w, \dots$ bezeichnet.
$\|.\|$ ist die Euklidnorm.

8.2.1 Definition: Differenzierbarkeit

$f\colon D \to \mathbb{R}^m$ heißt *differenzierbar* in $x \in D$, wenn es eine $m \times n$-Matrix A gibt mit
$$f(x+h) - f(x) - Ah = o(\|h\|) \text{ für } h \to 0 \ (h \in \mathbb{R}^n).$$
Äquivalent hierzu ist:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A \cdot h}{\|h\|} = 0.$$
Interpretation:
$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + A \cdot h}_{\otimes} + \underbrace{o(\|h\|)}_{\odot}$$

$\otimes$: Affine Funktion von h.
$\odot$: Fehlerterm: $< \varepsilon \cdot \|h\|$ für $\|h\| < \delta$.

8.2.2 Bemerkungen

(a) Sei $n = m = 1$:

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + o(|h|)$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a =: f'(x)$$

(b) Man nennt A die Ableitung von f und schreibt $f'(x) = A$. Andere Schreibweise:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ist die Jacobi-Matrix.}$$

8.2.3 Beispiele

(1) Sei $f(x) = c$ konstant mit $c \in \mathbb{R}^m$.
Dann ist $f'(x) = 0$ die $m \times n$-Nullmatrix,
denn $f(x+h) - f(x) - 0 \cdot h = 0 = o(\|h\|)$.

(2) Sei $f(x) = Ax$ mit einer $m \times n$-Matrix A.

$$f(x+h) - f(x) = A \cdot h = A \cdot h + o(\|h\|),$$

also ist $f'(x) = A$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Sei $f(x) = x^T Ax$ mit einer symmetrischen $n \times n$-Matrix A.
Es ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Also ist $f'(x)$ eine $1 \times n$-Matrix, ein Zeilenvektor.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^T A(x+h) - x^T Ax \\ &= x^T Ah + h^T Ax + h^T Ax \\ &= (x^T A)h + (x^T A^T)h + h^T Ah \\ &= (x^T A)h + (x^T A)h + h^T Ah \end{aligned}$$

Da $|h^T Ah| = O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$ für $h \to 0$ ist, ist

$$f'(x) = x^T A + x^T A = 2x^T A.$$

8.2.4 Satz

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$$

ist genau dann in x differenzierbar, wenn alle $f_\mu\colon D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar sind. Es gilt:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sei $A = f'(x)$ und $a^\mu := f'_\mu(x)$.

„⇒“: $f'(x)$ existiere nach Voraussetzung. Dann ist

$$\begin{aligned}|f_\mu(x+h) - f_\mu(x) - a^\mu h| &\leq \|f(x+h) - f(x) - A \cdot h\| \\ &= o(\|h\|) \text{ für } h \to 0,\ \mu = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Also ist $f'_\mu(x) = a^\mu$.

„⇐“: $f'_\mu(x) = a^\mu$ existieren nach Voraussetzung. Setze

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \text{ ist } m \times n\text{−}Matrix$$

$$\begin{aligned}\|f(x-h) - f(x) - a \cdot h\| &\leq \sum_{\mu=1}^{m} \underbrace{|f_\mu(x+h) - f_\mu(x) - a^\mu \cdot h|}_{=o(\|h\|)} \\ &= o(\|h\|) \text{ für } h \to 0\end{aligned}$$

Also ist $f'(x) = A$.

8.2.5 Satz: Die Ableitung ist eindeutig

Die Ableitung ist eindeutig bestimmt. Ist f differenzierbar in x, so ist f auch stetig in x.

Beweis:

Eindeutigkeit: Sei

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + A \cdot h + o(\|h\|) \\ f(x+h) &= f(x) + B \cdot h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert:

$$\mathbb{R}^m \ni 0 = (A - B) \cdot h + o(\|h\|) \text{ für } h \to 0,\ h \in \mathbb{R}^n$$

Folgt daraus $A = B$?
Setze $h = t \cdot e$ mit $t \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^n$ und $\|e\| = 1$.
Es gilt: $h \to 0 \iff t \to 0$.

$$t(A - b)e = o(|t|) \text{ für } t \to 0$$

$$(A - B)e = \frac{1}{t} o(|t|) = o(1) \text{ für } t \to 0$$

Für $t \to 0$ gilt dann:

$$(A - B) \cdot e = 0 \text{ für alle } e \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|e\| = 1.$$

Also ist $A - B = 0$, d. h. $A = B$.

Stetigkeit:

$$\begin{aligned}\|f(x+h)-f(x)\| &= \|A\cdot h + o(\|h\|)\| \\ &\le \|A\|\cdot\|h\| + \varepsilon\|h\| \text{ für } \|h\|<\delta \text{ bei vorgegebenem } \varepsilon \\ &= \text{const}\cdot\|h\| \text{ für } \|h\|<\delta\end{aligned}$$

Setze nun $y = x + h$. Dann ist

$$\|f(y)-f(x)\| \le \text{const}\cdot\|x-y\| \text{ für } \|x-y\|<\delta.$$

Also ist f stetig.

8.2.6 Regeln für differenzierbare Funktionen

Sind $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x, so auch $f+g$, $\lambda\cdot f$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) und $f\cdot g\colon D\to\mathbb{R}$ (Skalarprodukt). Im Punkt x gilt:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$
$$(f\cdot g)' = f^T g' + g^T f'$$

Vergleiche mit den eindimensionalen Regeln (4.1.3, Seite 74).

Beweis: Als Aufgabe.

8.2.7 Kettenregel für differenzierbare Funktionen

Zur Wiederholung zuerst die Kettenregel im 1-dimensionalen: Seien $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dann ist

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Sei nun $g\colon D\subseteq\mathbb{R}^n \to G\subseteq\mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x\in D$ und $f\colon G\to\mathbb{R}^p$ sei differenzierbar in $y = g(x)$. Dann ist $f\circ g\colon D\to\mathbb{R}^p$ differenzierbar in x mit

$$(f\circ g)'(x) = f'(y)\cdot g'(x) \text{ mit } y = g(x).$$

Beweis: Sei $\Phi = f\circ g$, $B = g'(x)$ und $A = f'(y)$. Dann ist

$$g(x+h) = g(x) + B\cdot h + o(\|h\|) \text{ für } h\to 0$$

und

$$f(y+k) = f(y) + A\cdot k + o(\|k\|) \text{ für } k\to 0.$$

Es ist $y = g(x)$, $y + k = g(x+h)$, also $k = g(x+h) - g(x)$. Damit ist

$$\begin{aligned}\Phi(x+h) = f(g(x+h)) = f(y+k) &= f(y) + A\cdot k + o(\|k\|) \text{ für } k\to 0 \\ &= f(g(x)) + A\cdot(g(x+h)-g(x)) + o(\|g(x+h)-g(x)\|) \text{ für } h\to 0 \\ &= \Phi(x) + A\cdot(g(x+h)-g(x)) + o(\|g(x+h)-g(x)\|) \text{ für } h\to 0\end{aligned}$$

Außerdem ist $\|k\| = O(\|h\|)$ für $h \to 0$. Dann gilt:

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + A \cdot (B \cdot h + o(\|h\|)) + \underbrace{o(O(\|h\|))}_{=o(\|h\|)} = \Phi(x) + A \cdot B \cdot h + o(\|h\|) + o(\|h\|)$$
$$= \Phi(x) + A \cdot B \cdot h + o(\|h\|) = \Phi(x) + f'(y)g'(x)h + o(\|h\|)$$

Also ist $\Phi'(x) = f'(y)g'(x)$ mit $y = g(x)$.

8.2.8 Mittelwertsatz I

Sei $u\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und S sei eine Strecke in D mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Ist u differenzierbar in D, so gibt es ein $\xi \in S \setminus \{a, b\}$ mit

$$u(b) - u(a) = u'(\xi)(b - a).$$

Beweis: Sei $\varphi(t) := u(a + t \cdot (b - a))$ für $0 \leq t \leq 1$. Nach dem 1-dimensionalen Mittelwertsatz (4.2.4, Seite 78) gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1 - 0).$$

Mit der Kettenregel gilt dann:

$$u(b) - u(a) = u'(\underbrace{a + \tau(b - a)}_{=:\xi}) \cdot (b - a).$$

8.2.9 Mittelwertsatz II

Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und sind a, b und S wie im MWS I, so gilt:

$$f(b) - f(a) = J(\xi^1, \ldots, \xi^m) \cdot (b - a).$$

Dabei ist

$$J(\xi^1, \ldots, \xi^m) = \begin{pmatrix} f_1'(\xi^1) \\ f_2'(\xi^2) \\ \vdots \\ f_m'(\xi^m) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi^1, \ldots, \xi^m \in S \setminus \{a, b\}.$$

Beweis: Mittelwertsatz I anwenden auf f_μ:

$$f_\mu(b) - f_\mu(a) = f_\mu'(\xi^\mu)(b - a).$$

Dabei ist $\xi^\mu \in S \setminus \{a, b\}$ für $\mu = 1, \ldots, m$.
Daraus folgt dann die Behauptung.

8.2.10 Definition: Integrierbarkeit von Matrizen

Seien $a_{\mu,\nu}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ für $\mu = 1, \ldots, m$ und $\nu = 1, \ldots, n$ integrierbar und $A(t) = (a_{\mu,\nu})_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}}$.
Man setzt

$$\int_0^1 A(t)\, dt := \left(\int_0^1 a_{\mu,\nu}(t)\, dt \right)$$

und nennt A integrierbar. Das Ergebnis ist eine $m \times n$-Matrix.

8.2.11 Mittelwertsatz III

Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, sind a, b und S wie im MWS I und ist $f'(a + t \cdot (b - a))$ integrierbar über $[0, 1]$, dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left(\int_0^1 f'(a + t(b-a))\,dt\right)}_{m\times n\text{-Matrix}} \cdot (b-a).$$

Beweis: Hier für $m = 1$. Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$.
Setze $\varphi(t) = u(a + (b-a)t)$. Es ist $\varphi'(t) = u'(a + t(b-a)) \cdot (b-a)$.
Mit dem Hauptsatz gilt dann

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt,$$

also

$$u(b) - u(a) = \int_0^1 u'(a + t(b-a)) \cdot (b-a)\,dt.$$

8.2.12 Satz

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ in D, so ist f konstant.

Beweis: Zuerst als Erinnerung für $m = n = 1$:

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(y-x) = 0.$$

Seien nun $x, y \in D$ und sei s ein achsenparalleler Streckenzug in D von x nach y.
Die Ecken von s seien $x = a^1, a^2, \ldots, a^k = y$. Es gilt:

$$f(a^j - f(a^{j-1}) \overset{\text{MWS II}}{=} J(\xi^1, \ldots, \xi^m) \cdot (a^j - a^{j-1}) = 0.$$

Daraus folgt:

$$f(y) - f(x) = f(a^k) - f(a^1) = \sum_{j=2}^{k} f(a^j) - f(a^{j-1}) = 0.$$

Also ist f konstant.

8.3 Partielle Ableitungen

8.3.1 Vorüberlegungen

Sei $u\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x.
Dann ist

$$u'(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$$

und

$$u(x+h) = u(x) + a \cdot h + o(\|h\|) = u(x) + a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n + o(\|h\|)$$

mit $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Was ist dann a_1?

Setze $h = (t, 0, \ldots, 0)$. Dann gilt $h \to 0$ genau für $t \to 0$. Es ist

$$\begin{aligned} & u(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot t + o(|t|) \\ \Rightarrow\ & \frac{u(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{t} = \frac{a_1}{t} + \frac{o(|t|)}{t} \\ \Rightarrow a_1 = & \frac{u(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{t} + o(1) \text{ für } t \to 0 \\ \Rightarrow a_1 = & \lim_{t \to 0} \left[\frac{u(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{t} + o(1) \right] \end{aligned}$$

8.3.2 Definition: Partielle Ableitung, Gradient

Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x \in D$. Dann heißt

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu + t, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{t}$$

partielle Ableitung von u nach x_ν. Sie wird bezeichnet mit

$$D_\nu u(x) \text{ oder } \frac{\partial u}{\partial x_\nu}(x) \text{ oder } u_{x_\nu}(x).$$

Existieren alle partiellen Ableitungen, so heißt

$$\operatorname{grad} u(x) := (u_{(x_1)}(x), \ldots, u_{(x_n)}(x))$$

der *Gradient* von u.

Bemerkung: Der Gradientenvektor ist ein Zeilenvektor.

8.3.3 Satz

Ist u differenzierbar in x, so ist

$$u'(x) = \operatorname{grad} u(x).$$

Beweis: Oben in 8.3.1.

8.3.4 Definition: Richtungsableitung

Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$ und $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$. Dann heißt

$$\frac{\partial u}{\partial e}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{u(x+te) - u(x)}{t}$$

die *Richtungsableitung* von u in Richtung e.

Spezialfall: Für $e = e^\nu$ ist $\frac{\partial u}{\partial e^\nu} = \frac{\partial u}{\partial x_\nu}$.

8.3.5 Satz

Ist $u\colon D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen $\frac{\partial u}{\partial e}(x)$ und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial e}(x) = e \cdot \operatorname{grad} u(x).$$

Es gilt dann:

$$-\|\operatorname{grad} u(x)\| \leq \frac{\partial u}{\partial e}(x) \leq \|\operatorname{grad} u(x)\|.$$

Falls $\operatorname{grad} u(x) \neq 0$ ist, so ist Gleichheit nur für

$$e = \pm \frac{\operatorname{grad} u(x)}{\|\operatorname{grad} u(x)\|}.$$

Beweis: u ist differenzierbar. Damit ist

$$u(x+h) = u(x) + u'(x) \cdot h + o(\|h\|) \text{ für } h \to 0.$$

Setze $h = t \cdot e$ mit $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$ und $t \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\begin{aligned} u(x+te) - u(x) &= tu'(x)e + o(|t|) \text{ für } t \to 0 \\ \Rightarrow \frac{u(x+te) - u(x)}{t} &= u'(x) \cdot e + o(1) \text{ für } t \to 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial e}(x) &= u'(x) \cdot e = \operatorname{grad} u(x) \cdot e \end{aligned}$$

Beweis der Ungleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial e} &= \operatorname{grad} u \cdot e \overset{\text{CSU}}{\leq} \|\operatorname{grad} u\| \cdot \underbrace{\|e\|}_{=1} \\ \frac{\partial u}{\partial e} &= \operatorname{grad} u \cdot e \overset{\text{CSU}}{\geq} -\|\operatorname{grad} u\|. \end{aligned}$$

Falls $\operatorname{grad} u \neq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{„} = \text{“} &\iff \operatorname{grad} u \text{ und } e \text{ sind linear abhängig} \\ &\iff e = \lambda \operatorname{grad} u \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für positives λ liegt rechts, für negatives λ liegt links Gleichheit vor. Es ist also $\lambda = \pm \frac{1}{\|\operatorname{grad} u\|}$.

8.3.6 Satz

Ist $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so ist

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x) \\ \operatorname{grad} f_2(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Ohne.

8.3.7 Beispiele

1. Sei $u(x,y) = e^x \cos(y-x)$. Dann ist
$$u_x = e^x \cos(y-x) + e^x(-\sin(y-x)) \cdot (-1) = e^x(\cos(y-x) + \sin(y-x))$$
und
$$u_y = -e^x \sin(y-x).$$
Frage: Ist u nun differenzierbar?

2. Sei
$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{für } |y| > x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$
u' und u sind unstetig in $(0,0)$.
Alle Richtungsableitungen $\frac{\partial u}{\partial e}$ existieren in $(0,0)$. Es ist
$$\frac{\partial u}{\partial e}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } e = (\pm 1, 0) \\ \frac{a^2}{b} & \text{für } e = (a,b),\ a^2+b^2 = 1,\ b \neq 0 \end{cases},$$
denn für $e = (\pm 1, 0)$ ist
$$\frac{u(\pm t, 0) - u(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} \to 0 \text{ für } t \to 0$$
und für $e = (a,b)$ mit $b \neq 0$ ist
$$\begin{aligned} \frac{u(at,bt) - u(0,0)}{t} &= \frac{\frac{a^2t^2}{bt} - 0}{t} \text{ für kleines } |t| \\ &= \frac{a^2}{b} \to \frac{a^2}{b} \text{ für } t \to 0. \end{aligned}$$
Zeige nun, daß u in $(0,0)$ nicht stetig ist:
Es ist $u(x,0) = 0$ und $u(x, 2x^2) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.
Also ist u nicht stetig und damit nicht differenzierbar in $(0,0)$.

8.3.8 Satz

Existiert $\operatorname{grad} u$ von $u\colon D \to \mathbb{R}$ und sind $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ im Punkt x stetig, so ist u in x differenzierbar.

Beweis: Sei $h = (h_1, \ldots, h_n)$ und $h^\nu = (h_1, \ldots, h_\nu, 0, \ldots, 0)$.
Insbesondere sind dann:
$h^0 = (0, \ldots, 0)$
$h^1 = (h_1, 0, \ldots, 0)$
$h^2 = (h_1, h_2, 0, \ldots, 0)$.
Es gilt dann:
$$\begin{aligned} u(x+h) - u(x) - \operatorname{grad} u(x) \cdot h &= \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{u(x+h^\nu) - u(x+h^{\nu-1})}_{h_\nu u_{x_\nu}(x+\xi_\nu)} - u_{x_\nu}(x) h_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \left[u_{x_\nu}(x+\xi_\nu) - u_{x_\nu}(x) \right]. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert (Stetigkeit des Gradienten) ein $\delta > 0$ mit

$$\|\operatorname{grad} u(x) - \operatorname{grad} u(y)\| < \varepsilon \text{ für } \|x - y\| < \delta.$$

Setze nun $y = x + h$ mit $\|h\| < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x) - \operatorname{grad} u(x) \cdot h| &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|h\| \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (u_{x_\nu}(x + \xi_\nu) - u_{x_\nu}(x))^2} \\ &< \varepsilon \cdot \|h\| \text{ für } \|h\| < \delta. \end{aligned}$$

Also ist $u'(x) = \operatorname{grad} u(x)$.

8.3.9 Bemerkungen

Sei $u\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt x. Dann gilt

$$u(x+h) = u(x) + u'(x) \cdot h + o(\|h\|).$$

Für $n = 1$ ist $z = u(x) + u'(x) \cdot t$ die Gleichung der Tangenten an den Graphen an der Stelle x.
Für $n \geq 2$ ist

$$z = u(a) + u'(a) \cdot (x - a)$$

die Gleichung einer Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

$$T_a := \big\{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon z = u(a) + u'(a) \cdot (x - a)\big\}$$

ist eine Tangentialhyperebene. Für diese Ebene gilt

$$z - u(a)) - u'(a) \cdot (x - a) = 0.$$

Setze nun

$$\nu = \begin{pmatrix} -u_{x_1}(a) \\ \vdots \\ -u_{x_n}(a) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Für $(x, z) \in T_a$ gilt nun

$$\nu \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \\ z - u(a) \end{pmatrix} = 0, \qquad \nu \text{ist orthogonal zu } \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \\ z - u(a) \end{pmatrix}.$$

Also ist ν Normalenvektor zur Tangentialhyperebene.

8.4 Höhere Ableitungen

8.4.1 Definition: Stetig differenzierbar

Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, Gebiet. u heißt *stetig differenzierbar*, wenn $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ in D stetig sind: $u \in C^1(D)$. $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenziervar, wenn $f_1, \ldots, f_m \in C^1(D)$ sind: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.

8.4.2 Definition: Mehrfach stetig differenzierbar

$u\colon D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal stetig differenzierbar, geschrieben: $u \in C^k(D)$, wenn alle Ableitungen $D_{j_1} \cdot D_{j_2} \dots D_{j_k} u$ für $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ in D stetige Funktionen sind.

8.4.3 Beispiele

1. Es ist z. B. $D_1 D_2 u = (u_{x_2})_{x_1} =: u_{x_2 x_1}$
   und $D_3 D_7 D_4 u = (((u_{x_4})_{x_7})_{x_3}) =: u_{x_4 x_7 x_3}$.
2. Sei $u(x, y) = x^2 - e^{xy}$. Dann ist

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - ye^{xy} & u_y &= -xe^{xy} \\ u_{xx} &= 2 - y^2 e^{xy} & u_{xy} &= -e^{xy} - xye^{xy} \\ u_{yy} &= -x^2 e^{xy} & u_{yx} &= -e^{xy} - xye^{xy}. \end{aligned}$$

8.4.4 Satz von H. A. Schwarz (1. Version)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $u\colon D \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(D)$ und u_{xy} existiere in D und ist stetig in $(a, b) \in D$. Dann existiert auch $u_{yx}(a, b) = u_{xy}(a, b)$.

Beweis: Für $(a, b) = (0, 0)$:
Es gilt

$$\begin{aligned} R(x, y) &:= (u(x, y) - u(x, 0)) - (u(0, y) - u(0, 0)) \\ &= x \cdot [u_x(\xi, y) - u_x(\xi, 0)] \text{ mit } \xi \text{ aus dem MWS zwischen 0 und } x \\ &= x \cdot y \cdot u_{xy}(\xi, \eta) \text{ mit } \eta \text{ zwischen 0 und } y \text{ (MWS)} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} u_{xy}(\xi, \eta) &= \frac{R(x, y)}{xy} = \frac{u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0)}{xy} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{(u(x, y) - u(x, 0)) - (u(0, y) - u(0, 0))}{y} \end{aligned}$$

Für $y \to 0$ ist damit

$$\to \frac{1}{x}(u_y(x, 0) - u_y(0, 0))$$

und danach für $x \to 0$:

$$\to u_{yx}(0, 0)$$

Dabei geht die linke Seite wegen der Stetigkeit von $u_{x,y}$ gegen $u_{xy}(0, 0)$.

8.4.5 Satz von H. A. Schwarz (2. Version)

Ist $u \in C^k(D)$, so ist

$$D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k} u \text{ für } j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$$

unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Beweis: Als Aufgabe.

8.4.6 Definition und Regeln: Multiindex

$p \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex. Es gilt:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ mit } p_\nu \in \mathbb{N}_0$$
$$|p| := p_1 + p_2 + \cdots + p_n \text{ ist die Länge von } p$$
$$p! := p_1! \cdot p_2! \cdots p_n!$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$x^p := x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}.$$

8.4.7 Definition: Polynom, Taylorpolynom

$$\sum_{|p| \leq k} a_p x^p \text{ mit festem } k \text{ und } a_p = a_{p_1, \dots, p_n}$$

ist ein Polynom in $x \in \mathbb{R}^n$.
Z. B. ist für $n = 2$

$$a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2.$$

Sei nun $u \in C^k(D)$ und $p \in \mathbb{N}_0^n$ mit der Länge $|p| = k$.
Dann bedeutet

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^p} = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$$

differenziere p_1-mal nach x_1,
differenziere p_2-mal nach x_2,
$\vdots$
differenziere p_n-mal nach x_n.
Sei nun $u \in C^k(D)$ und $a \in D$. Dann ist

$$T_k(x; a) := \sum_{|p| \leq k} c_p (x - a)^p$$

mit

$$c_p := \frac{1}{p!} \cdot \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x^p}(a)$$

das k-te Taylorpolynom von u an der Stelle a.

8.4.8 Satz von Taylor

Ist $u \in C^k(D)$ und ist $a \in D$, so gilt:

$$|u(x) - T_k(x; a)| = o(\|x - a\|^k)$$

für $x \to a$.

Beweis: Wähle $r > 0$ so, daß $K(a, r) \subseteq D$ ist. Sei dann $x \in K(a, r)$.
Setze

$$\varphi(t) := u(a + t(x - a)) \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$

Es ist $\varphi \in C^k([0, 1])$. Damit ist nach dem eindimensionalen Satz von Taylor (4.4.5, Seite 92):

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(\ell)}(0)}{\ell!} 1^\ell + \frac{\varphi^{(k)}(\tau)}{k!} 1^k \text{ mit } 0 < \tau < 1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\varphi^{(\ell)}(0)}{\ell!} + \frac{\varphi^{(k)}(\tau) - \varphi^{(k)}(0)}{k!}.
\end{aligned}$$

Mit Induktion (wird weiter unten gezeigt) gilt dann:

$$\frac{\varphi^{(\ell)}}{\ell!}(t) = \sum_{|p|=\ell} \frac{1}{p!} \cdot \frac{\partial^\ell u}{\partial x^p}(a + t(x - a))(x - a)^p. \tag{8.1}$$

Wenn (8.1) gilt, dann folgt:

$$\begin{aligned}
u(x) =& \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{|p|=\ell} \frac{1}{p!} \cdot \frac{\partial^\ell u}{\partial x^p}(a)(x - a)^p \\
&+ \left[\sum_{|p|=k} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a + \tau(x - a)) - \frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a) \right) (x - a)^p \right] \\
&= T_k(x; a) + R_k(x; a).
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$|R_k(x; a)| \leq \sum_{|p|=k} \frac{1}{p!} \cdot \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a + \tau(x - a)) - \frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a) \right| \cdot \|x - a\|^k,$$

weil

$$|h^p| = |h_1^{p_1} \dots h_n^{p_n}| \leq \|h\|^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \|h\|^{|p|}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dazu existiert (wegen der Stetigkeit) ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a + h) - \frac{\partial^k u}{\partial x^p}(a) \right| < \varepsilon \text{ für } \|h\| < \delta.$$

Für $\|x - a\| < \delta$ gilt dann:

$$|R_k(x; a)| \leq \varepsilon \|x - a\|^l \cdot (\#\text{Anzahl der Summanden}).$$

Beweise nun die Gleichung (8.1): Hier für $a = 0$.

$\ell = 1$: Es ist

$$\varphi(t) \stackrel{!}{=} u(tx) \checkmark$$

$\ell \mapsto \ell + 1 \leq k$:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(\ell+1)}}{(\ell+1)!}(t) &= \frac{1}{\ell+1}\left(\frac{\varphi^{(\ell)}(t)}{\ell!}\right)' \\ &= \frac{1}{\ell+1}\sum_{|p|=\ell}\frac{1}{p!}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^\ell u}{\partial x^p}(tx)\cdot x_\nu x^p \\ &= \frac{1}{\ell+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{|p|=\ell}\frac{1}{p!}\cdot\frac{\partial^{\ell+1}u}{\partial x^{p+e^\nu}}(tx)x^{p+e^\nu}\end{aligned}$$

mit e^ν, dem ν-ten Einheitsvektor. Es gilt:

$$|p+e^\nu| = |p| + 1 = \ell + 1.$$

Sei nun q ein Multiindex der Länge $\ell + 1$. Dann ist

$$M_q := \{p\colon |p| = \ell \text{ und } q = p + e^\nu \text{ für ein } \nu\}.$$

Mit

$$\sum_{p\in M_q}\frac{1}{p!} = \sum_{q_\nu>0}\frac{p_\nu+1}{q!} = \sum_{q_\nu>0}\frac{q_\nu}{q!} = \frac{1}{q!}(\ell+1)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(\ell+1)}}{(\ell+1)!}(t) &= \frac{1}{\ell+1}\sum_{|q|=\ell+1}\sum_{p\in M_q}\frac{1}{p!}\cdot\frac{\partial^{\ell+1}u}{\partial x^q}(tx)x^q \\ &= \frac{1}{\ell+1}\sum_{|q|=\ell+1}\frac{1}{q!}\cdot\frac{\partial^{\ell+1}u}{\partial x^q}(tx)x^q(\ell+1) \\ &= \sum_{|q|=\ell+1}\frac{1}{q!}\cdot\frac{\partial^{\ell+1}u}{\partial x^q}(tx)x^q.\end{aligned}$$

8.4.9 Spezialfall für den Satz von Taylor

Sei $u \in C^2(D)$ und $a \in D$. Dann ist

$$\begin{aligned}u(x) =& u(a) + \sum_{\nu=1}^{n} u_{x_\nu}(a)(x_\nu - a_\nu) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} u_{x_\nu x_\mu}(a)(x_\nu - a_\nu)(x_\mu - a_\mu) \\ &+ o(\|x-a\|^2).\end{aligned}$$

8.4.10 Definition: Hesse-Matrix

Für $u \in C^2(D)$ heißt

$$H_u(a) := \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & \dots & u_{x_1x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{x_nx_1} & u_{x_nx_2} & \dots & u_{x_nx_n}\end{pmatrix}(a)$$

Hesse-Matrix. H_u ist symmetrisch, da $u_{x_\mu x_\nu} = u_{x_\nu x_\mu}$.
Setze man $Q_u(h) := h^T H_u(a)h$, dann gilt mit Taylor:

$$u(a+h) = u(a) + u'(a) \cdot h + \frac{1}{2}Q_u(h) + o(\|h\|^2).$$

8.4.11 Definition: Extremum

Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$. $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Stelle eines Maximums bzw. Minimums (zusammen: Extremums) der Funktion u, wenn

$$u(x) \leq u(a) \text{ bzw. } u(x) \geq u(a) \text{ für alle } \|x-a\| < \delta.$$

8.4.12 Satz

Sei $u\colon D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$.

(1) Ist a Stelle eines Extremums und existiert $u'(a)$, so ist $u'(a) = 0$.

(2) Ist sogar $u \in C^2(D)$, so gilt im Falle eines Maximums bzw. Minimums, daß $H_u(a)$ negativ bzw. positiv semidefinit ist.

Beweis:

(1) $\varphi(t) = u(a_1+t, a_2, \ldots, a_n)$ hat Extremum für $t=0$, d. h. $\varphi'(0) = 0 = u_{x_1}(a)$, also ist $u'(a) = 0$.

(2) Gilt:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimum:} & \varphi''(0) \leq 0 & u_{x_1x_1}(a) \leq 0 \\ \text{Maximum:} & \varphi''(0) \geq 0 & u_{x_1x_1}(a) \geq 0 \end{array} \; ?$$

Z. B. für das Minimum: Sei $\|h\| \leq \delta$:

$$u(a) \leq u(a+h) = u(a) + \underbrace{u'(a) \cdot h}_{=0} + \frac{1}{2}Q_u(h) + o(\|h\|^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Q_u(h) + o(\|h\|^2) \geq 0 \text{ für } \|h\| < \delta.$$

Wähle nun $e \in \mathbb{R}^n$ und setze $h = te$ mit kleinem $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$o \leq \frac{1}{2}Q_u(te) + o(\|te\|^2) = \underbrace{t^2}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1}{2}Q_u(e) + o(1)\right)}_{\geq 0} \text{ für } t \to 0$$

Für $t \to 0$ ist damit dann $Q_u(e) \geq 0$ für $e \in \mathbb{R}^n$, d. h. Q_u ist positiv semidefinit.

8.4.13 Satz

Sei $u \in C^2(D)$, $a \in D$, $u'(a) = 0$ und $H_u(a)$ positiv bzw. negativ definit. Dann ist a Stelle eines Minumums bzw. Maximums.
Ist H_u indefinit, so liegt in a weder ein Maximum noch ein Minimum.

Beweis: Sei Q_u positiv definit. Dann ist

$$\begin{aligned} u(a+h)-u(a) &= \underbrace{\frac{1}{2}Q_u(h)}_{\substack{\geq\alpha\|h\|^2 \\ \text{mit } \alpha>0}} + \underbrace{o(\|h\|^2)}_{\substack{|.|<\frac{\alpha}{2}\|h\|^2 \\ \text{für } \|h\|<\delta}} \\ &\geq \left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\|h\|^2 > 0 \text{ für } 0<\|h\|<\delta \end{aligned}$$

Also ist in a ein Minimum.

8.4.14 Beispiele

(1) Sei $u(x,y)=x^2-y^2$. Dann ist $u_x=2x$ und $u_y=-2y$. $u'=0$ gilt genau für $(x,y)=(0,0)$.
Es ist $u_{xx}=2$, $u_{xy}=0=u_{yx}$ und $u_{yy}=-2$.
Also ist $H_u=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$. H_u ist indefinit.
Also gibt es keine Extrema.

(2) Sei $u(x,y)=xy(1-x-xy)$.
Dann ist $u_x=y(1-x-y)+xy(-1)=y(1-2x-y)$ und $u_y=x(1-2y-x)$.
$u_x=0,\ u_y=0 \iff (x,y)\in\{(0,0),(1,0),(0,1),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$.
Es ist $u_{xx}=-2y$, $u_{yy}=-2x$
und $u_{xy}=u_{yx}=-2x-2y$.
$H_u(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ist indefinit.
$H_u(1,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ist indefinit.
$H_u(0,1)=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ ist indefinit.
$H_u(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ist negativ definit, also liegt ein Maximum vor.

(3) Sei $u(x,y,z)=x^2+y^2-xy-x+z^2-z$.
Es sind dann

$$\begin{aligned} u_x &= 2x-y-1 \\ u_y &= 2y-x \\ y_z &= 2z-1=0 \end{aligned}$$

Es ist $(u_x,u_y,u_z)=(0,0,0)$ für $(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$
und $H_u=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ist positiv definit,
also liegt in $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ein Minimum vor.

8.5 Implizite Funktionen und Umkehrfunktionen

8.5.1 Beispiel

Die Gleichung $x^y=y^x$ hat für $x,y>0$ z. B. folgende Lösungen:
$y=x$

$x = 4,\ y = 2$
$y = 4,\ x = 2$
Gibt es weitere Lösungen?

8.5.2 Schreibweisen

Im Folgenden ist $\mathbb{R}^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder (x, y) ist $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.

8.5.3 Satz über implizit definierte Funktionen

Es sei $U = K(x^0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V = K(y^0, \varrho) \subseteq \mathbb{R}^m$.
Außerdem sei $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x^0, y^0) = 0$ gegeben.
f sei stetig,

$$f_y := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

sei stetig und $\det f_y(x^0, y^0) \neq 0$.
Dann gibt es Kugeln $U_0 = K(x^0, r_0)$ und $V_0 = K(y^0, \varrho_0)$, sowie eine stetige Funktion $g\colon U_0 \to V_0$ mit

$$\{(x, y)\colon x \in U_0,\ y \in V_0,\ f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x))\colon x \in U_0\}\,.$$

Ist f_x stetig, so ist $g \in C^1(U_0, \mathbb{R}^m)$ und in U_0 ist

$$g'(x) = -(f_y(x, g(x)))^{-1} \cdot f_x(x, g(x)).$$

Beweis: Sei OBdA $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $y^0 = 0 \in \mathbb{R}^m$ (sonst betrachte $f(x^0+x, y^0+y) = \tilde{f}(x, y) = 0$).
Setze

$$A := (f_y(0, 0))^{-1}.$$

Dann ist

$$f(x, y) = 0 \iff y = y - Af(x, y) =: F(x, y).$$

Beachte: Es ist $F(0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^m$ und $F_y(0, 0) = 0$ ist $(m \times n)$-Nullmatrix.
Wähle nun U_0 und V_0 so, daß $\|F(x, 0)\| < \varrho_0/2$ für $x \in U_0$ ist (dies ist wegen der Stetigkeit von F möglich), und daß $\|F_y(x, y)\| < \frac{1}{2}$ ist für $(x, y) \in U_0, V_0$.

Eindeutigkeit von g:
Zeige: Zu $x \in U_0$ gibt es höchstens ein $y \in V_0$ mit $f(x, y) = 0$.
Annahme: Es gibt $y, z \in V_0$ mit $f(x, y) = f(x, z) = 0$. Es gilt dann:

$$y = F(x, y)$$

$$z = F(x, z)$$

Nach Subtraktion gilt dann:

$$\begin{aligned} y - z &= F(x, y) - F(x, z) \\ &\overset{\text{MWS III}}{=} \left[\int_0^1 F_y(x, ty + (1-t)z)\, dt \right] \cdot (y - z). \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}\|y-z\| &\le \left\| \int_0^1 \underbrace{F_y(x, ty+(1-t)z)\,dt}_{\|\cdot\|<\frac{1}{2}} \right\| \cdot \|y-z\| \\ &\le \frac{1}{2}\|y-z\|,\end{aligned}$$

also ist $y = z$.

Existenz von g:
Setze

$$M = \{u\colon u \text{ ist stetig in } U_0,\ u\colon U_0 \to V_0,\ u(0) = 0\}\,.$$

Definiere folgende Metrik auf M:

$$d(u,v) := \sup\{\|u(x) - v(x)\|\colon x \in U_0\}\,.$$

> **Anmerkung** zur Definition dieser Norm:
> Sei $B = \{u \in C(u_0, \mathbb{R}^m)\colon u(0) = 0\}$.
> Auf B ist folgende Norm definiert: $\|u\|_\infty := \sup\{\|u(x)\|\colon x \in U_0\}$.
> B ist ein Banachraum.
> M ist abgeschlossene Teilmenge von B mit $d(u,v) = \|u - v\|_\infty$.

Also ist M vollständig.
Definiere nun eine Kontraktion T auf M:

$$T: \begin{cases} u \in M & \mapsto Tu \\ (Tu)(x) & := F(x, u(x)) \end{cases}$$

Zeige nun:

1. $T\colon M \to M$, T ist Selbstabbildung
2. $d(Tu, Tv) \le \frac{1}{2} d(u,v)$, T ist eine Kontraktion.

Dann gibt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz (7.5.5, Seite 181) (genau) ein $u \in M$, stetig mit $u = Tu$, d. h.

$$\begin{aligned} u(x) = F(x, u(x)) &= u(x) - Af(x, u(x)) \\ \iff& f(x, u(x)) = 0 \text{ in } U_0. \end{aligned}$$

Setze dann $g = u$.

Beweise nun, daß T eine Selbstabbildung (1) und Kontraktion(2) ist:

(1) $\bar{u}(x) := (Tu)(x) = F(x, u(x))$ ist wohldefiniert, da $\|u(x)\| < \varrho_0$ ist, und da F in $U_0 \times V_0$ definiert ist.
Es gilt: $\bar{u}(0) = F(0,0) = 0$.
$\bar{u}$ ist stetig.
Ist $\|\bar{u}\| < \varrho_0$, d. h. gilt $\bar{u}\colon U_0 \to V_0$?

$$\begin{aligned}\|\bar{u}(x)\| &\le \|F(x,0)\| + \|F(x, u(x)) - F(x,0)\| \\ &< \frac{\varrho_0}{2} + \frac{1}{2}\|u(x) - 0\| < \varrho_0.\end{aligned}$$

(2) Beweis der Kontraktion:
Seien $u, v \in M$, $\bar{u} = Tu$ und $\bar{v} = Tv$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|\bar{u}(x) - \bar{v}(x)\| &= \|F(x, u(x)) - F(x, v(x))\| \\ &\le \frac{1}{2}\|u(x) - f(x)\| \le \frac{1}{2} d(u, v)\end{aligned}$$

für alle $x \in U_0$.
Also ist $d(\bar{u}, \bar{v}) \le \frac{1}{2} d(u, v)$.

Differenzierbarkeit von g (zunächst in $x = 0$). (Es ist $F \in C^1(U_0 \times V_0, \mathbb{R}^m)$)
Es gilt die Approximation

$$F(x, y) = F_x(0,0)x + o(\|(x, y)\|) \text{ für } (x, y) \to (0,0).$$

Beachte dabei, daß $F_y(0,0) = 0$ ist.
Insbesondere gilt:

$$g(x) = F(x, g(x)) = F_x(0,0)x + o(\|(x, g(x))\|,$$

also ist $g(x) = O(\|x\|)$ für $x \to 0$.
Es ist dann

$$g(x) - F_x(0,0)x = o(\|(x, g(x))\|) = o(\|x\|) \text{ für } x \to 0$$

$$g(x) - g(0) - F_x(0,0)x = o(\|x\|),$$

d. h.

$$g'(0) = +F_x(0,0) = -Af_x(0,0) = (f_y(0, g(0)))^{-1} f_x(0, g(0)).$$

Also gilt die Behauptung für $x = 0$.
Differenzierbarkeit von g für $\xi \in U_0$: Es ist zu zeigen:

$$g'(\xi) = -(f_y(\xi, g(\xi)))^{-1} f_x(\xi, g(\xi)) \text{ für } \xi \in U_0.$$

Die Rolle, die (x^0, y^0) gespielt hat, kann jeder Punkt $(\xi, g(\xi))$ übernehmen.

8.5.4 Beispiel

Für $n = 2$ und $m = 1$. Die Gleichung

$$\sin(x + z) + \sin(y + z) = z$$

ist in einer Umgebung von $(x, y) = (0,0)$ in der Form $z = g(x, y)$ aufzulösen, wobei $g(0,0) = 0$ ist.
Überprüfe die Voraussetzungen: Es ist $f(x, y, z) = \sin(x + z) + \sin(y + z) - z$.
$f(0,0,0) = 0$
Außerdem ist $f_z(x, y, z) = \cos(x + z) + \cos(y + z) - 1$
$f_z(0,0,0) = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$.
Also existiert eine Funktion $g \colon U_0 \to V_0$ mit $g(0,0) = 0$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U_0$.
Dabei ist $U_0 = K((0,0), r_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V_0 = (-\varrho, \varrho)$.
Berechne nun $g_x(0,0)$ und $g_y(0,0)$:
Es ist $f(x, y, g(x, y)) = 0$ in U_0. Differenziere nach x und y.
Dann ist

$$f_x + f_z \cdot g_x = 0$$

und

$$f_y + f_z \cdot g_y = 0.$$

In $(x, y) = (0, 0)$, $z = 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 1 \cdot g_x(0,0) &= -f_x(0,0,0) = -\cos(0+0) = -1 \\ 1 \cdot g_y(0,0) &= -f_y(0,0,0) = -\cos(0+0) = -1. \end{aligned}$$

8.5.5 Satz über die Umkehrfunktion

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$.
Außerdem sei $\xi \in D$ und $\det f'(\xi) \neq 0$. Dann gibt es in einer Kugel $V_0 = K(\eta, r)$ eine Umkehrfunktion g von f mit $g(\eta) = \xi$.
g ist dadurch eindeutig bestimmt und es gilt:

$$g'(y) = (f'(x))^{-1}\Big|_{x=g(y)}$$

Beweis: Setze $F\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(x, y) := f(x) - y$.
$F \in C^1(D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $F(\xi, \eta) = 0$.
$F_x(x, y) = f'(x)$, also ist $\det F_x(\xi, \eta) = \det f'(\xi) \neq 0$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert V_0 sowie $g \in C^1(V_0, \mathbb{R}^n)$ mit

$$g(\eta) = \xi$$

und

$$F(g(y), y) = 0 \text{ für alle } y \in V_0.$$

Es gilt:

$$\begin{gathered} f(g(y)) - y = 0,\ g = f^{-1} \text{ in } V_0 \\ f(g(y)) = y \\ f'(g(y)) \cdot g'(y) = I = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1). \end{gathered}$$

Daraus folgt die Behauptung für $g'(y)$.

8.5.6 Definition: Diffeomorphismus

Eine bijektive C^1-Funktion $f\colon D \to G$ mit $f^{-1} \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ heißt *Diffeomorphismus*.

8.5.7 Satz über die Gebietstreue

Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ mit einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und regulärem $f'(x)$ in D, so ist $f(D)$ wieder ein Gebiet. ($f'(x)$ ist regulär, wenn die Determinante ungleich Null ist.)

Beweis: $G = f(D)$ ist zusammenhängend, weil D zusammenhängend und weil f stetig ist.
Sei nun $\eta \in G = f(D)$ und $\eta = f(\xi)$.
Da $\det f'(\xi) \neq 0$ ist, existiert eine Kugel $V_0 = K(\eta, r_0)$ sowie $f^{-1} \colon V_0 \to D$.
Es gilt: $V_0 \subseteq f(D)$, η ist innerer Punkt, beliebig.
Also ist $f(D) = G$ offen.

8.6 Extrema mit Nebenbedingungen

8.6.1 Allgemeines Problem

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \colon D \to \mathbb{R}$ und $g \colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $m < n$.
Gesucht sind Maxima bzw. Minima von f auf

$$M = \{x \colon g(x) = 0\}.$$

Extremum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

8.6.2 Konkrete Probleme

(a) A sei eine symmetrische $n \times n$-Matrix.
Maximiere bzw. Minimiere $x^T Ax$ auf der Menge $\{x \colon \|x\| = 1\}$.
Hier: $f(x) = x^T Ax$, $D = \mathbb{R}^n$, $g(x) = \|x\|^2 - 1$.

(b) Maximiere $x_1 x_2 \dots x_n$ unter der NB $x_1 + \dots + x_n = n$, alle $x_\nu > 0$.
Hier: $f(x) = x_1 \dots x_n$, $g(x) = x_1 + \dots + x_n - n$, $D = \{x \colon x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

8.6.3 Lagrangesche Multiplikationsregel

$f \in C^1(D)$ habe in $\xi \in D$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, wobei $g \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und $\operatorname{rg} g'(\xi) = m$, $m < n$.
Dann gibt es ein $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$ mit: Die Ableitung von

$$H(x, \lambda) := f(x) - \lambda \cdot g(x)$$

$H \colon D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ verschwindet in (ξ, λ^0).
λ^0 heißt Lagrangemultiplikator.

Beweis: Sei $\operatorname{rg} g'(\xi) = m$. Dann enthält die $m \times n$-Matrix eine reguläre $m \times m$-Matrix. Nach Umnumerierung sei OBdA $\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}\right)_{\mu,\nu=1,\dots,m}$ regulär.
Schreibe $x = (y, z)$ und $\xi = (\eta, \zeta)$. Dabei ist $y = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $z = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\eta \in \mathbb{R}^m$ und $\zeta \in \mathbb{R}^{n-m}$.
Es ist $g(y, z) = 0$, $g(\eta, \zeta) = 0$ und $g_y(\eta, \zeta)$ regulär.
Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine Kugel $U = (\zeta, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und $h \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit

$$g(h(z), z) = 0 \text{ in } U$$

$$g(y, z) \neq 0 \text{ für } z \in U,\ y \neq h(z)$$

$\Phi(z) = f(h(z), z)$, definiert in U, hat Extremum in $z = \zeta \in U$, also

$$\Phi'(\zeta) = 0.$$

Es ist $\Phi'(z) = f_y(h(z), z) \cdot h'(z) + f_z(h(z), z)$ und $g(h(z), z) = 0$ in U.

$$\Rightarrow \underbrace{g_y(h(z), z)}_{m\times n\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{h'(z)}_{m\times(n-m)} + g_z(h(z), z) = 0$$

$g_y(h(\zeta), \zeta) = g_y(\eta, \zeta)$ ist regulär.
Mit Einsetzen von (2) in (1) ergibt sich

$$h'(\zeta) = (g_y(\eta, \zeta))^{-1} \cdot g_z(\eta, \zeta)$$
$$-f_y(\eta, \zeta) \cdot (g_y(\eta, \zeta))^{-1} g_z(\eta, \zeta) + f_z(\eta, \zeta) = 0$$
$$-f_y(\xi) \cdot (g_y(\xi))^{-1} g_z(\xi) + f_z(\xi) = 0$$

Setze $(\lambda^0)^T := -f_y(\xi) \cdot (g_y(\xi))^{-1} \in \mathbb{R}^m$. Daraus folgt dann:

$$f_z + \lambda^0 g_z = 0 \text{ in } \xi$$
$$f_y + \lambda^0 g_y = 0 \text{ in } \xi$$

8.6.4 Beispiel

Maximiere bzw. Minimiere $x^T Ax$ unter der NB $\|x\|^2 = 1$.

(1) $S^{n-1} = \{\|x\|^2 = 1\}$ ist kompakt.
Also existieren Maximum und Minimum von $x^T Ax$ auf S^{n-1}.

(2) Setze

$$g(x) = \|x\|^2 - 1 = \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2\right) - 1$$

Es ist $m = 1 < n$,

$$g'(x) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n) \neq 0 \text{ auf } S^{n-1}$$

und $\operatorname{rg} g'(x) = 1$.

(3) Es ist

$$H(x, \lambda) = \sum_{\nu,\nu=1}^{n} a_{\nu\nu} x_\mu x_\nu - \lambda \cdot \left(\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2\right) - 1\right)$$

Dann ist

$$H_{x_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} x_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\varrho} x_\mu - 2\lambda x_\varrho = 2\left(\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} x_\nu\right) - \lambda x_\varrho\right) \stackrel{!}{=} 0 \text{ für } \varrho = 1, \ldots, n$$

$$H_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff Ax - \lambda x = 0 \text{ und } \|x\|^2 = 1$$

Minimum und Maximum von $x^T Ax$ werden *nur* in Eigenvektoren auf S^{n-1} angenommen. Dabei ist λ der zugehörige Eigenwert.

$$\min_{S^{n-1}}, \max_{S^{n-1}} x^T Ax \in \left\{x^T Ax \colon x \in S^{n-1}, \, x \text{ Eigenvektor}\right\}$$

$\max, \min x^T Ax =$größter bzw. kleinster Eigenwert.

8.6.5 Praktisches Vorgehen

Gesucht: Extremum von $f(x)$ unter der NB $g(x) = 0$.

1. Ansatz: $H(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x)$.
2. Ableitung berechnen und gleich 0 setzen:
$$H_x = f' + \lambda g' \stackrel{!}{=} 0 \qquad\qquad H_\lambda = g \stackrel{!}{=} 0$$
Dies sind $n + m$ Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten.
3. Auflösen nach (x, λ). λ nicht unbedingt explizit erforderlich: Lösungen (ξ, λ).
4. Ist $\operatorname{rg} g'(\xi) = m$? Hat f unter NB überhaupt Extrema? Wenn ja, suche unter den Werten $f(\xi)$.

8.6.6 Beispiele

1. Maximiere $x_1 x_2 \ldots x_n$ unter der NB $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ $(x_1, \ldots, x_n > 0)$.
Es ist $f(x) = x_1 \ldots x_n$, $g(x) = x_1 + \cdots + x_n - n$ und $D = \{x \colon x_\nu > 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$.
Ansatz:
$$\begin{aligned} H(x, \lambda) &= x_1 \ldots x_n + \lambda(x_1 + \cdots + x_n - n) \\ H_{x_j} &= \frac{x_1 \ldots x_n}{x_j} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \text{ für alle } j \\ H_\lambda &= x_1 + \cdots + x_n - n = 0 \end{aligned}$$
Also ist $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, da $x_1 + \cdots + x_n = n$ ist und alle x_ν gleich sein müssen.
Es ist $\xi = (1, \ldots, 1)$. Ist
$$f(\xi) = 1 \cdots 1 = 1 = \text{Maximum unter NB?}$$
Es ist $g'(x) = (1, \ldots, 1) \neq 0$ und $\operatorname{rg} g'(x) = 1 = m$.
Existenz des Maximums:
$$\{x \colon x_1 + \cdots + x_n = n,\ x_1, \ldots, x_n > 0\}$$
ist kompakt. Darauf hat f ein Maximum. Es wird *nicht* angenommen, wenn ein $x_\nu = 0$, also angenommen, wo alle $x_\nu > 0$ sind, also in D.
2. A sei eine $n \times n$-Matrix mit
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}^2 = n.$$
Gesucht ist A, so daß $\det A$ maximal wird.
   (a) $\{(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \colon a_\mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{(n^2)}$
   (b) $\{a_{\mu,\nu} \colon \sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^2 = n\}$ ist kompakt.
   (c) $A \mapsto \det A$ ist stetig. Somit existiert das Maximum.
   (d) Es gilt $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$ (LaPlace'scher Entwicklungssatz).

(e) Setze $f(A) = \det A$ und $g(A) = \sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^2 - n$.

Ansatz:

$$\begin{aligned} H(A,\lambda) &= \det A + \lambda \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^2 - n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} + \lambda \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^2 - n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_{j\ell}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial a_{j\ell}} A_{jk} + 2\lambda a_{j\ell} &= A_{j\ell} + 2\lambda a_{j\ell} = 0 \\ A_{j\ell} &= -(2\lambda) a_{j\ell} \\ \det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} A_{j\ell} &= -2\lambda \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}^2 \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n$.
Dann ist

$$\begin{aligned} n \cdot \det A = -2\lambda \cdot \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell}^2 &= n(-2\lambda) \\ \det A &= -2\lambda. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{1}{\det} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\frac{-2\lambda}{\det A} A^T = A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

A ist Orthogonalmatrix, also ist $\det A = 1$.

8.6.7 Satz

Unter allen $n \times n$-Matrizen mit $\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}^2 = n$ haben genau die Orthogonalen maximale Determinanten $\det A = 1$.
Hadamardsche Determinantengleichung: Sei A eine $n \times n$-Matrix:

$$(\det A)^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2.$$

„=“ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} a_{\ell k} = 0$ ist für $j \neq \ell$.

Beweis: Ist o.k., wenn $\det A = 0$ ist.
Sei $\det A > 0$ und setze

$$S_j^2 := \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2.$$

Es ist $S_j > 0$. Setze

$$b_{jk} = \frac{a_{jk}}{x_j}.$$

Dann ist

$$\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^2 = n \;\Rightarrow\; (\det B)^2 \leq 1$$

$$(\det A)^2 = s_1^2 \cdots x_n^2 (\det B)^2 \leq x_1^2 \cdots s_n^2.$$

Gleichheit ist dabei genau für orthogonales B. Rest als Aufgabe.

9 Kurvenintegrale[1]

9.1 Riemann-Stieltjes Integrale

9.1.1 Feste Bezeichnungen, Riemann-Stieltjes-Summe

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall. $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ ist Zerlegung von $[a,b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ ist ein passendes Zwischenpunktsystem mit $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Funktionen und

$$\sigma(Z, \tau, f, g) := \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j) \cdot [g(t_j) - g(t_{j-1})]$$

ist *Reimann-Stieltjes-Summe* für f, g.

Bemerkung: Für $g(t) = t$ ist die Riemann-Stieltjes-Summe eine Riemannsche Zwischensumme.

9.1.2 Definition: Riemann-Stieltjes-Integral

f heißt integrierbar bezüglich g und

$$A := \int_a^b f\, dg$$

heißt *Riemann-Stieltjes-Integral* von f bezüglich g, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - A| < \varepsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit $|Z| := \max\limits_{j=1}^{m}(t_j - t_{j-1}) < \delta$ und alle Zwischenpunktsysteme τ.

9.1.3 Bemerkung

Für $g(t) = t$ ist das Riemann-Stieltjes-Integral gleich dem Riemann-Integral.

9.1.4 Beispiel

Seien $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, f stetig in $t = 0$ und

$$g(t) = \begin{cases} \alpha & \text{in } [-1, 0) \\ \beta & \text{in } [0, 1]. \end{cases}$$

[1]Version 4.10 vom 19. Dezember 2002

Behauptung:

$$\int_{-1}^{1} f\,dg = f(0)\cdot(\beta-\alpha)$$

Beweis: Sei Z Zerlegung und τ Zwischenpunktsystem. Wähle j so, daß $t_{j-1} < 0 \le t_j$. Dann ist

$$\sigma(Z,\tau,f,g) = f(\tau_j)\cdot[g(t_j)-g(t_{j-1})] = [\beta-\alpha]\cdot(f(0)+f(\tau_j)-f(0))$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß

$$|f(\tau)-f(0)| < \varepsilon \text{ für } |\tau| < \delta.$$

Für $|Z| < \delta$ gilt dann:

$$|\sigma(Z,\tau,f,g)-(\beta-\alpha)\cdot f(0)| \le |\beta-\alpha|\cdot\varepsilon.$$

9.1.5 Cauchykriterium

$\int\limits_a^b f\,dg$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|\sigma(Z,\tau,f,g)-\sigma(Z',\tau',f,g)| < \varepsilon \tag{9.1}$$

für alle Z, Z', τ und τ' mit $|Z| < \delta$ und $|Z'| < \delta$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Wie immer.

„$\Leftarrow$“: Wähle Folgen (Z_n) und $(\tau^{(n)})$ so, daß $|Z_n| \to 0$.
Es ist

$$\sigma_n := \sigma(Z_n,\tau^{(n)},f,g) \in \mathbb{R}.$$

(σ_n) ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Also ist $\sigma_n \to A \in \mathbb{R}$.
Sei $\varepsilon > 0$ und Z beliebig mit $|Z| < \delta$ und ZPS τ.
Aus (9.1) folgt dann für Z und Z_n mit $|Z_n| < \delta$:

$$|\sigma(Z,\tau,f,g)-\sigma(Z_n,\tau^{(n)},f,g)| < \varepsilon.$$

Für $n \to \infty$ ist dann $|\sigma(Z,\tau,f,g)-A| \le \varepsilon$, also ist $A = \int\limits_a^b f\,dg$.

9.1.6 Eigenschaften des RS-Integrales

(a) f-Linearität:

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)\,dg = \alpha_1\int_a^b f_1\,dg + \alpha_2\int_a^b f_2\,dg$$

(b) g-Linearität:

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2) = \alpha_1\int_a^b f\,dg_1 + \alpha_2\int_a^b f\,dg_2$$

(c) Existiert

$$\int_a^b f\,dg,$$

so existiert für $[c,d] \subseteq [a,b]$ auch

$$\int_c^d f\,dg.$$

(d) Es gilt:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle dazu $\delta > 0$ so, daß (9.1) aus dem Cauchykriterium gilt.
Wähle nun eine Zerlegung Z von $[c,d]$ mit ZPS τ und $|Z| < \delta$.
Ergänze nun Z zur Zerlegung $\tilde{Z}$ von $[a,b]$ mit $|\tilde{Z}| < \delta$.
Ergänze entsprechend τ zum ZPS $\tilde{\tau}$ von $[a,b]$.
Wähle nun Z_1 wie Z, $\tau^{(1)}$ wie τ.
Ergänze Z_1 und $\tau^{(1)}$ genauso wie Z und τ zu $\tilde{Z}_1$ und $\tilde{\tau}^{(1)}$. Dann ist

$$|\sigma(Z,\tau,f,g) - \sigma(Z_1,\tau^{(1)},f,g)| = |\sigma(\tilde{Z},\tilde{\tau},f,g) - \sigma(\tilde{Z}_1,\tilde{\tau}^{(1)},f,g)| < \varepsilon,$$

d. h. das Cauchy-Kriterium ist für $[c,d]$ erfüllt.

(d) Aufgabe.

9.1.7 Partielle Integration

Zuerst noch einmal für das Riemann-Integral. Es ist

$$\int_a^b f \cdot g'\,dt = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'c \cdot g\,dt.$$

Für das Riemann-Stieltjes-Integral gilt: Existiert $\int_a^b f\,dg$, so existiert auch

$$\int_a^b g\,df = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f\,dg.$$

Beweis: Sei Z Zerlegung und τ ein Zwischenpunktsystem.

$$\begin{aligned}\sigma(Z,\tau,g,f) &= \sum_{j=1}^{m} g(\tau_j)\cdot[f(t_j)-f(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{m} g(\tau_j)f(t_j) - \sum_{j=0}^{m-1} g(\tau_{j+1})f(t_j)\\ &= -\sum_{j=0}^{m} f(t_j)[g(\tau_{j+1})-g(\tau_j)] - g(\tau_0)f(t_0) + g(\tau_{m+1})f(t_m)\\ &= -\sigma(Z',\tau',f,g) + fg\Big|_a^b\end{aligned}$$

Dabei ist $\tau_0 = t_0$ und $\tau_{m+1} = t_m$.
Damit ist $Z' = \{\tau_0,\dots,\tau_{m+1}\}$ Zerlegung und $\tau' = \{t_0,\dots,t_m\}$ ZPS.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß

$$\left|\sigma(\tilde{Z},\tilde{\tau},f,g) - \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon$$

für alle $\tilde{Z}$ mit $|\tilde{Z}| < \delta$ und alle $\tilde{\tau}$ ist.
Sei nun $|Z| < \frac{\delta}{2}$. Dann ist $|Z'| < 2\cdot\frac{\delta}{2} = \delta$ und damit ist

$$\left|\sigma(Z',\tau',f,g) - \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon,$$

also ist für $|Z| < \frac{\delta}{2}$

$$\left|\sigma(Z,\tau,g,f) - fg\Big|_a^b + \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung.

9.1.8 Zusammenhang zwischen RS- und R-Integralen

Sind f und g' Riemann-integrierbar, dann ist

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,dt.$$

Beweis: Sei Z Zerlegung mit Zwischenpunktsystem τ. Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma(Z,\tau,f,g) &= \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)\cdot[\underbrace{g(t_j)-g(t_{j-1})}_{\substack{\text{MWS:}\\ =(t_j-t_{j-1})g'(\tilde{\tau}_j)}}]\\ &= \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)g'(\tau_j)(t_j-t_{j-1})\\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(g'(\tilde{\tau}_j)-g'(\tau_j))(t_j-t_{j-1})\\ &\quad = \sigma(Z,\tau,f\cdot g') + \tilde{\sigma}\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, daß

1. $|\sigma(Z, \tau, f \cdot g') - \int\limits_a^b f(t)g'(t)\,dt| < \varepsilon$ für $|Z| < \delta$ und alle τ.
2. $|S(Z, g') - s(Z, g')| < \varepsilon$ für $|Z| < \delta$.

f ist beschränkt, d. h. $|f| < M$.

$$\left|\sigma(Z, \tau, f, g) - \int\limits_a^b f(t)g'(t)\,dt\right| \leq \underbrace{\left|\sigma(Z, \tau, fg') - \int\limits_a^b fg'\,dt\right|}_{<\varepsilon,\,|Z|<\delta} + |\tilde{\sigma}|$$
$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} M \cdot \left[\sup_{t_{j-1} \leq \tau \leq t_j} g'(\tau) - \inf_{t_{j-1} \leq \tau \leq t_j} g'(\tau)\right] \cdot (t_j - t_{j-1})$$
$$< \varepsilon + M \cdot \varepsilon \text{ für } |Z| < \delta, \text{ alle } \tau.$$

9.1.9 Satz: Existenz des RS-Integrales

Ist $f \in C([a, b])$ und ist g monoton, dann existiert $\int\limits_a^b f\,dg$.

Beweis: Für monoton wachsendes g.
Sei $\varepsilon > 0$.

1. Dazu existiert ein $\delta > 0$ mit
$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon$$
für $x, t \in [a, b]$, $|s - t| < \delta$ (gleichmäßige Stetigkeit).
2. Sind Z und Z' Zerlegungen mit $Z \subseteq Z'$ und $|Z| < \delta$, so gilt:
$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - \sigma(Z', \tau', f, g)| \leq \varepsilon(g(b) - g(a)).$$
Beweis:
Berechne die Beiträge von $[t_{\mu-1}, t_\mu]$ zu den $\sigma(Z, \dots)$ und
berechne die Beiträge von $[t_{\mu-1}, t_\mu]$ zu den $\sigma(Z', \dots)$:
$$Z: \quad f(\tau_\mu) \cdot [g(t_\mu) - f(t_\mu - 1)] = \sum_{j=\nu+1}^{\nu+k} f(\tau_\mu) \cdot [g(t'_j) - g(t'_{j-1}]$$
$$Z': \quad \sum_{j=\nu+1}^{\nu+k} f(\tau'_j) \cdot [g(t'_j) - g(t'_{j-1})]$$
Dann ist für $|\tau_\mu - \tau'_j| < \delta$:
$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - \sigma(Z', \tau', f, g)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{m'} \underbrace{(g(t'_j) - g(t'_{j-1}))}_{\geq 0}$$
$$= \varepsilon \cdot (g(b) - g(a))$$

3. Seien nun Z' und Z'' beliebige Zerlegungen mit $|Z'| < \delta$, $|Z''| < \delta$ und Zwischenpunktsystemen τ' und τ.
   Setze $Z = Z' \cup Z''$ und $\tau = \tau' \cup \tau''$.
   Dann ist $|Z| < \delta$ und

$$\begin{aligned} |\sigma(Z', \tau', f, g) - \sigma(Z'', \tau'', f, g)| &\leq |\sigma(Z') - \sigma(Z)| + |\sigma(Z) - \sigma(Z'')| \\ &\leq 2\varepsilon(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

   Das Cauchykriterium ist also erfüllt, d. h. das Integral $\int\limits_a^b f\,dg$ existiert.

9.2 Funktionen von endlicher Variation

9.2.1 Definition: Variation

Sei $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so setzt man

$$\operatorname{var}(Z, g) := \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

und

$$V_a^b(g) := \sup\{\operatorname{var}(Z, g)\colon Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}.$$

$V_a^b(g)$ heißt (Total-)Variation von g. Ist $V_a^b(g) < \infty$, so heißt g von *endlicher (beschränkter) Variation.*

9.2.2 Beispiele

(1) Sei g monoton ($\oplus$). Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Z, g) &= \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| \\ &\overset{\oplus}{=} \left| \sum_{j=1}^{m} g(t_j) - g(t_{j-1}) \right| \\ &= |g(b) - g(a)| \\ \Rightarrow V_a^b(g) &= |g(b) - g(a)|. \end{aligned}$$

(2) Sei $g' \in R([a, b])$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Z, g) = \sum_{j=1}^{m} |\underbrace{g(t_j) - g(t_{j-1})}_{=(t_j - t_{j-1})g'(\tau_j)}| &\leq S(Z, g') \text{ Obersumme} \\ &\geq s(Z, g') \text{ Untersumme} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_a^b(g) = \int\limits_a^b |g'(t)|\,dt.$$

(3) Sei

$$g(t) = \begin{cases} t\cos\frac{\pi}{t} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

in $[a,b] = [0,1]$. g ist stetig, aber nicht von endlicher Variation.
Wähle folgende Zerlegung Z für $m \in \mathbb{N}$:

$$Z := \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| &= \left|\frac{1}{m}\cos(\pi m)\right| + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j} + \frac{1}{j-1} \\ &> \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \\ &\to \infty \text{ für } m \to \infty.\end{aligned}$$

(4) Aufgabe: Zeige, daß

$$g(t) = \begin{cases} t^2\cos\frac{\pi}{t} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

von endlicher Variation ist.

9.2.3 Satz

Ist g von endlicher Variation, so ist

$$v(t) = \begin{cases} V_a^t(g) & \text{für } a < t \leq b \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

monoton wachsend und dort stetig, wo g stetig ist.

Beweis: Sei $a \leq c < b$. Dann gilt:

$$V_a^b = V_a^c + V_c^b$$

Beweis hierfür:
Seien Z' und Z'' Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, $Z = Z' \cup Z''$. Es ist dann:

$$V_a^b(g) \geq \operatorname{var}(Z,g) = \operatorname{var}(Z', g\big|_{[a,c]}) + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]}.$$

Also ist $V_a^b \geq V_a^c + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]})$ und auch $V_a^b \geq V_a^c + V_c^b$.
Nun die Umkehrung: Z sei Zerlegung von $[a,b]$, $Z_c = Z \cup \{c\}$.
Damit ist ($\oplus$ als Aufgabe):

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Z,g) &\overset{\oplus}{\leq} \operatorname{var}(Z_c, g) \\ &= \operatorname{var}(Z', g\big|_{[a,c]}) + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]})\end{aligned}$$

mit $Z' = Z_C \cap [a,b]$ und $Z'' = Z_C \cap [c,b]$.
Also ist $\operatorname{var}(Z,g) \leq V_a^c(g) + V_c^b(g)$ und damit $V_a^b \leq V_a^c + V_c^b$.
Zusammen ergibt sich die Behauptung.

Monotonie von v: Sei $a \leq s < t \leq b$. Dann ist

$$v(t) = v(s) + \underbrace{V_s^t(g)}_{\geq 0} \geq v(s).$$

Stetigkeit von v: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit

$$\operatorname{var}(Z, g) > V_a^b(g) - \varepsilon.$$

Sei nun $a < c < d < b$. Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= (Z \cap [c, d]) \cup \{c, d\} \\ Z_1 &= (Z \cap [a, c]) \cup \{c\} \\ Z_2 &= (Z \cap [d, b]) \cup \{d\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\operatorname{var}(\tilde{Z}, g\big|_{[c,d]}) > V_c^d(g) - \varepsilon,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} V_a^b(g) &< \operatorname{var}(Z, g) + \varepsilon \\ &= \operatorname{var}(Z_1, g) + \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + \operatorname{var}(Z_2, g) + \varepsilon \\ &< V_a^c(g) + \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + V_a^b(g) + \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $V_c^d(g) < \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + \varepsilon$.
Zeige nun: Wenn g in $\tau \in [a, b]$ stetig ist, so ist v rechtsseitig stetig in τ.
(Zeige dann genauso, daß v auch linksseitig stetig ist).
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle Z mit

$$\operatorname{var}(Z, g) > V_a^b(g) - \varepsilon.$$

Wähle $\delta > 0$ so, daß $(\tau, \tau + \delta)$ keinen Teilpunkt von Z enthält.
$\{\tau, t\}$ ist Zerlegung von $[\tau, t]$. Es ist

$$\begin{aligned} |g(t) - g(\tau)| &> V_\tau^t(g) - \varepsilon \\ &= v(t) - v(\tau) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(t) - v(\tau) \\ &< \underbrace{|g(t) - g(\tau)|}_{<\varepsilon \text{ für } |t-\tau|<\delta'} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$|v(t) - v(\tau)| < 2\varepsilon$$

für $\tau < t < \min(\tau + \delta, \tau + \delta')$.
Das heißt, daß v stetig ist.

9.2.4 Zerlegungssatz

g ist genau dann von endlicher Variation, wenn es eine Darstellung

$$g = g_1 - g_2$$

mit monoton wachsenden Funktionen g_1 und g_2 gibt.
Es gilt dann:

$$V_a^b(g) \le V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2).$$

Beweis:

„⇐“: Setze $g = g_1 - g_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Z,g) &\le \sum_{j=1}^{m} |g_1(t_j) - g_1(t_{j-1})| + |g_2(t_j) - g_2(t_{j-1})| \\ &\le \operatorname{var}(Z,g_1) + \operatorname{var}(Z,g_2) \\ &\le V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2)\end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Behauptung.

„⇒“: Konstruiere g_1 und g_2 wachsend mit $g = g_1 - g_2$ und

$$V_a^b(g) = V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2).$$

Es wird definiert:

$$v_\pm(t) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1}))^\pm \colon \{t_0,\dots,t_n\} \text{ bel. Zerl. von } [a,b]\right\}$$

sind die positive bzw. negative Variation.
Es gelten:

(1) $v_+(t) + v_-(t) = V_a^t(g)$

(2) $v_+(t) - v_-(t) = g(t) - g(a)$, denn es ist

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g_(t_{j-1}))^+ - \sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1}))^- \\ &= \sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1})) \\ &= g(b) - g(a).\end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$g(t) = \underbrace{(g(a) + v_+(t))}_{:=g_1} - \underbrace{v_-(t)}_{=:g_2}$$

g_1 und g_2 sind monoton wachsend wie V_a^t.
Es ist:

$$V_a^b(g_1) = v_+(b)$$
$$V_a^b(g_2) = v_-(b).$$

Nach Addition gilt:

$$V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2) = v_+(b) + v_-(b) = V_a^b(g).$$

9.2.5 Satz

Ist f stetig auf $[a,b]$ und g von endlicher Variation, so existiert $\int_a^b f\,dg$, und es ist

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g).$$

Beweis:

Existenz: Es ist $g = g_1 - g_2$ mit monoton wachsenden g_1 und g_2. Dann existieren

$$\int_a^b f\,dg_j \text{ für } j = 1, 2.$$

Also existiert auch

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dg_1 - \int_a^b f\,dg_2.$$

Abschätzung: Es ist

$$\begin{aligned} |\sigma(Z,\tau,f,g)| &= \left|\sum_{j=1}^m f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \operatorname{var}(Z,g) \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g). \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g).$$

9.2.6 Folgerung aus dem Zerlegungssatz

Man kann g_1 und g_2 so wählen, daß sie überall dort stetig sind, wo auch g stetig ist. Ist insbesondere $g \in C([a,b])$, so kann man $g_1, g_2 \in C([a,b])$ wählen.

Beweis: Wie bei $v(t)$ zeige:
v_+ und f_- sind dort stetig, wo auch g stetig ist. Setze dann $g_1 = v_+ + g(a)$ und $g_2 = v_-$.

9.2.7 Mittelwertsatz

Sei $f\colon [a,b] \to [m,M]$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei monoton. Außerdem existiere $\int\limits_a^b f\,dg$.

(a) Dann existiert ein $\mu \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f\,dg = \mu \cdot (g(b) - g(a)).$$

(b) Ist $f \in C([a,b])$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Beweis: Als Aufgabe (Riemann-Integral: $g(t) = t$).

9.2.8 Beispiel zum RS-Integral

Sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, stetig differenzierbar mit $f \to 0$ für $t \to \infty$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
L &= \int_\delta^T f(t)\,d(\underbrace{t - [t] - \frac{1}{2}}_{\substack{=g(t)\\ \text{endliche Variation}}}) \\
&= f(t) \cdot g(t)\Big|_\delta^T - \int_\delta^T f'(t) \cdot \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right) dt \\
L &= \int_\delta^T f(t)\,dt - \int_\delta^T f(t)\,d\left([t] - \frac{1}{2}\right) \\
&= \int_\delta^T f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{[T]} f(k).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[T]} f(k) &= \int_\delta^T f(t)\,dt + f(T)g(T) - f(\delta)g(\delta) - \int_\delta^T f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right) dt \\
&\xrightarrow{\delta \to 1} \int_1^T f(t)\,dt - \int_1^T f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right) dt + f(T)g(T) - \frac{1}{2} f(1).
\end{aligned}$$

Für $T \to \infty$ gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^\infty f(t)\,dt - \frac{1}{2} f(1) + \int_1^\infty f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right) dt,$$

falls $\int_1^\infty f(t)\,dt$ existiert. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^\infty f(t)\,dt - \frac{1}{2} f(1) - R$$

mit

$$|R| = \left| \int_1^\infty f'(t) \left(t - [t] - \frac{1}{2} \right) dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_1^\infty |f'(t)| \, dt.$$

9.3 Wege und Weglängen

9.3.1 Definition: Weg

Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Weg*. $\gamma(a)$ ist der *Anfangspunkt* und $\gamma(b)$ ist der Endpunkt.

$$|\gamma| := \{\gamma(t)\colon a \leq t \leq b\}$$

ist der *Träger* von γ.

9.3.2 Definition: rektifizierbarer Weg, Länge

Ein Weg γ heißt *rektifizierbar*, wenn

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \colon \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\} \text{ bel. Zerl. von } [a,b] \right\}$$

endlich ist. $L(\gamma)$ heißt *Länge* von γ.

9.3.3 Satz

γ ist genau dann rektifizierbar, wenn die $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ von endlicher Variation sind.

Beweis: Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ Zerlegung.

$$\sum_{j=1}^m |\gamma_\varrho(t_j) - \gamma_\varrho(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^n |\gamma_\nu(t_j) - \gamma_\nu(t_{j-1})|$$

für $\varrho = 1, \dots, n$.
Es gilt dann:

$$\operatorname{var}(Z, \gamma_\varrho) \leq \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq \sum_{\nu=1}^n \operatorname{var}(Z, \gamma_\nu)$$

für $\varrho = 1, \dots, n$. Also ist

$$V_a^b(\gamma_\varrho) \leq L(\gamma) \leq \sum_{\nu=1}^n V_a^b(\gamma_\nu).$$

9.3.4 Satz

(a) Ist γ rektifizierbar, so ist die *Bogenlänge*

$$s(t) := L(\gamma\big|_{[a,t]})$$

stetig und monoton wachsend und

$$L(\gamma) = \int_a^b 1\, ds \text{ (Riemann-Stieltjes-Integral)}.$$

(b) Ist γ stetig differenzierbar, so gilt

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Insbesondere ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Beweis:

(a) Sei $a \leq t' < t \leq b$. Dann ist

$$s(t) - s(t') = L(\gamma\big|_{[t',t]}) \geq 0 \;\Rightarrow\; s \nearrow$$

$$0 \leq s(t) - s(t') \leq \sum_{\nu=1}^{n} V_{t'}^{t}(\gamma_\nu) \to 0 \text{ für } t - t' \to 0.$$

(b) Ist γ' stetig, so sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ von endlicher Variation, d. h. γ ist rektifizierbar. Sei nun $a \leq t' < t \leq b$:

(a) $s(t) - s(t') \geq \|\gamma(t) - \gamma(t')\|$.
Sei Z Zerlegung von $[t', t]$, $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^{m} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\tau)\, d\tau \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau \\ &= \int_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.\end{aligned}$$

(b) $s(t) - s(t') \leq \int_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$.

Also ist

$$\left\| \frac{\gamma(t)-\gamma(t')}{t-t'} \right\| \le \frac{s(t)-s(t')}{t-t'} < \frac{1}{t-t'} \int\limits_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Für $t' \to t$ gilt dann:

$$\|\gamma'(t)\| \le s'(t) \le \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow s'(t) = \|\gamma'(t)\|, \text{ also } s \in C^1([a,b]).$$

Deshalb gilt:

$$s(t) = \int\limits_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$$

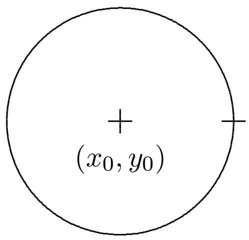
und

$$L(\gamma) = s(b) = \int\limits_a^b \|\gamma'(\tau)\|, d\tau.$$

9.3.5 Beispiele

(1) Kreislinie im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos t \\ y_0 + r\sin t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi$$



$$\gamma' = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

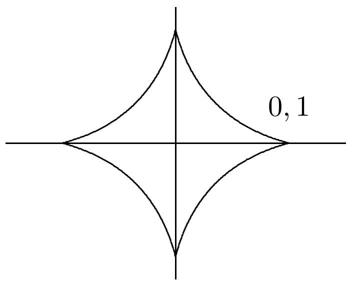
$$\|\gamma'\| = r$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$

(2) Asteroide im $\mathbb{R}^2$:

Es ist für $0 \le t \le 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$$



$$\|\gamma'\|^2 = (3\cos^2(t)\cdot\sin(t))^2 + (3\sin^2(t)\cdot\cos t)^2 = 9\cos^2 t \sin^2 t$$

$$\|\gamma'(t)\| = 3|\cos t \sin t| = \frac{3}{2}|\sin 2t| = s'(t)$$

$$L(\gamma) = 4\cdot\frac{3}{2}\int\limits_0^{pi/2} \sin 2\tau\, d\tau = \frac{6}{2}(-\cos 2\tau)\Big|_a^{\pi/2} = 6$$

(3) Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \text{ mit } r > 0,\ h > 0,\ 0 \le t \le \alpha$$

$$\|\gamma'\| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$L(\gamma) = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot \alpha$$

(4) Zykloide im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi$$

$$\|\gamma'\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + 1 = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

Also ist

$$\|\gamma'\| = 2\sin\frac{t}{2} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi$$

$$L(\gamma) = 2 \cdot (2\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8$$

9.3.6 Definition: Äquivalenz von 2 Wegen

Zwei Wege $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetige, monoton wachsende Bijektion $h\colon [a,b] \to [c,d]$ mit $\alpha(t) = \beta(h(t))$, $a \le t \le b$ gibt. Kurz: $\alpha \sim \beta$.

9.3.7 Beispiel

$$\alpha\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$

$$\beta\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \cdot |t| \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

α und β haben den gleichen Träger, gleichen Anfangs- und Endpunkt und die gleiche Länge. Setze hier

$$h(t) = \begin{cases} -\sqrt{|t|} & -1 \le t \le 0 \\ \sqrt{t} & 0 \le t \le 1 \end{cases}.$$

9.3.8 Satz und Definition: Kurve, Parameterdarstellung

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse heißt *Kurve*. Jeder Weg α einer Äquivalenzklasse heißt *Parameterdarstellung*. h heißt auch *Parameterwechsel*.

Beweis: Aufgabe.

9.3.9 Satz: Eigenschaften äquivalenter Wege

Äquivalente Wege haben

(a) denselben Anfangspunkt

(b) denselben Endpunkt

(c) denselben Träger

(d) dieselbe Länge

Beweis:

(a) Aufgabe

(b) Aufgbe

(c) Aufgabe

(d) Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(t) = \beta(h(t))$.
$Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ sei beliebige Zerlegung von $[a,b]$.
Setze $\tau_j = h(t_j)$.
Dann ist $Z' = (\tau_0, \dots, \tau_m)$ Zerlegung von $[c,d]$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^{m} \|\beta(\tau_j) - \beta(\tau_{j-1})\| \\ &\leq L(\beta)\end{aligned}$$

Also ist $L(\alpha) \leq L(\beta)$, da Z beliebig gewählt wurde.
Umgekehrt gilt auch $L(\beta) \leq L(\alpha)$. Benutze dafür h^{-1}.

9.3.10 Umorientierung von Wegen

Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\gamma := -\alpha$ der Weg

$$\gamma(t) = \alpha(-t) \text{ für } -b \leq t \leq -a.$$

Aufgabe: Zeige: $\alpha \sim \beta \;\Rightarrow\; -\alpha \sim -\beta$.

9.3.11 Aneinanderhängen von Wegen

Seien $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ Wege mit $\alpha(b) = \beta(c)$. Dann ist der Weg $\gamma := \alpha + \beta$ folgendermaßen erklärt:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & a \leq t \leq b \\ \beta(c+t-b) & b \leq t \leq b+d-c \end{cases}.$$

Aufgabe: Zeige: $\alpha \sim \alpha_1,\ \beta \sim \beta_1 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

9.3.12 Definition: Jordanweg/-bogen

Ist $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ injektiv, so heißt α *Jordanbogen*. Umgangssprachlich gesagt: Es treten keine Schnittpunkte auf.

9.3.13 Satz: Äquivalenz von Jordanbögen

Sind α und β Jordanbögen mit $|\alpha| = |\beta|$ und gleichem Anfangspunkt, so sind α und β äquivalent.

Beweis: $|\alpha| = |\beta| \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.
$\beta\colon [c,d] \to |\beta|$ ist stetig, bijektiv.
Damit ist $\beta^{-1}\colon |\beta| \to [c,d]$ stetig und bijektiv.
$h(t) = \beta^{-1}(\alpha(t))$ ist stetig, bijektiv: $[a,b] \to [c,d]$.
h ist insbesondere monoton. h ist sogar monoton wachsend,
da $h(a) = \beta^{-1}(\alpha(a)) = c$ und $h(b) = \beta^{-1}(\alpha(b)) = d$ und $\alpha(t) = \beta(h(t))$
Daraus folgt die Äquivalenz.

9.3.14 Definition: geschlossene Kurve, Jordankurve

$\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist. Ein geschlossener Weg heißt *Jordankurve*, wenn $\alpha\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist, aber $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist.

9.3.15 Jordanscher Kurvensatz

Ist γ eine Jordankurve im $\mathbb{R}^2$, so besteht $\mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$ aus zwei Gebieten G_i (innen) und G_a (außen). Dabei ist $G_i \cap G_a = \emptyset$ und $\partial G_i = \partial G_a = |\gamma|$.

Ohne Beweis.

9.3.16 Tangente an eine Kurve

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma'(t_0)$ existiere und sei ungleich 0. Dann ist

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

und

$$\tau \mapsto \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)\tau \text{ für } \tau \in \mathbb{R}$$

ist die Parameterdarstellung einer Geraden, der Tangente von γ im Punkt $\gamma(t_0)$.

9.3.17 Definition: C^1-Kurve, glatte Kurve

$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt C^1 bzw. glatt, wenn $\gamma \in C^1([a,b])$ bzw. wenn $\gamma \in C^1([a,b])$ und überall $\gamma'(t) \neq 0$ ist.

9.3.18 Beispiel

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t|t| \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $-1 \leq t \leq 1$.
γ ist ein C^1-Weg, aber nicht glatt, da $\gamma'(0) = 0$ ist.

9.3.19 Definition: stückweise C^1/glatt

γ heißt stückweise C^1 bzw. stückweise glatt, wenn es endlich viele C^1-Wege bzw. glatte Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ gibt mit $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$.

9.3.20 Satz

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und γ sei auf keinem Teilintervall konstant. Dann ist $s(t) = L(\gamma_{[a,t]})$ streng monoton wachsend.

Beweis: Zeige: $s(t) < s(t')$ für $t < t'$:
Es ex. $t'' \in (t,t')$ mit $\gamma(t'') \neq \gamma(t)$ oder $\gamma(t'') \neq \gamma(t')$:

$$s(t') - s(t) \geq \|\gamma(t) - \gamma(t'')\| + \|\gamma(t'') - \gamma(t')\| > 0.$$

Beachte: $s\colon [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ ist eine Bijektion, stetig und streng wachsend.
Die Umkehrfunktion $[0, L(\gamma)] \to [a,b]$ heiße $t = t(s)$.

9.3.21 Parametrisierung nach der Bogenlänge

Die Parameterdarstellung

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$$

heißt Parameterdarstellung nach der Bogenlänge. Sie ist äquivalent zu γ. Jeder Abschnitt von $\tilde{\gamma}$ hat die gleiche Länge wie das entsprechende Definitionsintervall von $\tilde{\gamma}$.

9.3.22 Satz

Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatt, so existiert die PD $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ nach der Bogenlänge und es gilt:

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Beachte: Es ist $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$.

Beweis:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$$

$s \in C^1([a,b])$ (früherer Satz).

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0,$$

wegen der Glattheit von γ.
$t = t(s)$ ist dann ebenfalls C^1, also auch

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

Es gilt:

$$\|\tilde{\gamma'}(s)\| = \|\gamma'(t(s))\| t'(s) = \|\gamma'(t(s))\| \frac{1}{s'(t)}\bigg|_{t=t(s)} = 1$$

9.4 Kurvenintegral

9.4.1 Definition

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon |\gamma| \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon |\gamma| \to \mathbb{R}^n$. Dann setzt man

(a)

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,ds := \int\limits_a^b \varphi(\gamma(t))\,ds(t)$$

mit der Bogenlänge $s(t)$. „Integral nach der Bogenlänge“.

(b)

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,dx_j := \int\limits_a^b \varphi(\gamma(t))\,d\gamma_j(t)$$

für $j = 1, \dots, n$.

(c)

$$\int\limits_{\gamma} f(x) \cdot dx := \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma} f_j(x)\,dx_j = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_a^b f_j(\gamma(t))\,d\gamma_j(t)$$

„Kurvenintegral“

Dies ist, falls die rechten Seiten als RS-Integrale existieren. Die Existenz ist gesichert, wenn φ bzw. f stetig ist und γ rektifizierbar ist.

9.4.2 Bemerkungen

(a) Diese Kurvenintegrale hängen nur von der Äquivalenzklasse von γ ab.
Beweis: Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\alpha\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = \alpha(h(t))$ und $h\colon [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, stetig, streng wachsend.
Zeige:

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,dx_j \stackrel{1}{=} \int\limits_{\alpha} \varphi(x)\,dx_j.$$

Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ Zerlegung von $[a,b]$
und $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ Zerlegung von $[c,d]$ mit $t'_k = h(t_k)$.
Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sigma(Z, \{t_1, \dots, t_m\}, \varphi \circ \gamma, \gamma_j) &= \sum_{k=1}^{m} \varphi(\gamma(t_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \varphi(\alpha(h(t_k)))(\alpha_j(h(t_k)) - \alpha_j(h(t_{k-1}))) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \varphi(\alpha(t'_k))(\alpha_j(t'_k) - \alpha_j(t'_{k-1})) \\
&= \sigma(Z', \{t'_1, \dots, t'_m\}, \varphi \circ \alpha, \alpha_j)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit der Summen und damit die Gleichheit der Integrale.

(b) Ist γ eine C^1-Kurve, so ist

$$\int_\gamma \varphi(x)\,ds = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\int_\gamma \varphi(x)\,dx_j = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt$$

$j = 1, \dots, n$

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

(c) Physikalische Interpretation (im $\mathbb{R}^3$):
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $K\colon G \to \mathbb{R}^3$ stetig.
K ist ein „Kraftfeld".
Ist nun $\gamma\colon [a, b] \to G$ ein Weg, dann ist

$$-m \int_\gamma K(x)\,dx$$

die Arbeit, die benötigt wird, um einen Massepunkt mit der Masse m gegen dieses Kraftfeld von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen.

(d) Geometrische Interpretation von (a):
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
Dann ist $\int_\gamma \varphi(x)\,ds$ die Mantelfläche, die durch φ und γ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt wird.

9.4.3 Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sei $f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
Berechne das Wegintegral von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ über verschiedene Wege

1. Sei

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

Es ist dann

$$\gamma_1'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

$$\int\limits_{\gamma_1} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_0^1 (-0\cdot 1 + t\cdot 0)\,dt + \int\limits_1^2 (-(t-1)\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt = 1$$

2. Sei

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$

Dann ist

$$\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_{\gamma_2} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_0^1 (-t\cdot 1 + t\cdot 1)\,dt = 0$$

3. Sei

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 < t \leq 2 \end{cases}.$$

Dann ist

$$\gamma_3'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\int\limits_{\gamma_3} f(x,y)\,d(x,y) = -1$$

9.4.4 Eigenschaften der Kurvenintegrale

(a) Additivität:

$$\int\limits_\gamma (\varphi(x) + \psi(x))\,ds = \int\limits_\gamma \varphi(x)\,ds + \int\limits_\gamma \psi(x)\,ds$$

$$\int\limits_\gamma (f(x) + g(x))\cdot dx = \int\limits_\gamma f(x)\cdot dx + \int\limits_\gamma g(x)\cdot dx$$

(b) Homogenität ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\int\limits_\gamma \lambda\varphi(x)\,ds = \lambda \int\limits_\gamma \varphi(x)\,dx$$

$$\int\limits_\gamma \lambda f(x)\cdot dx = \lambda \int\limits_\gamma f(x)\cdot dx$$

(c) Dreiecksungleichung:

$$\left|\int_\gamma f(x)\cdot dx\right| \leq \int_\gamma \|f(x)\|\cdot dx$$
$$\leq \sup_{x\in|\gamma|}\|f(x)\|\cdot L(\gamma)$$

(d) Aneinanderhängen:

$$\int_{\gamma_1+\dots+\gamma_m} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(x)\,dx$$

$$\int_{\gamma_1+\dots+\gamma_m} \varphi(x)\,ds = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \varphi(x)\,ds$$

(e)

$$\int_{-\gamma} f(x)\cdot dx = -\int_\gamma f(x)\cdot dx$$

$$\int_{-\gamma} \varphi(x)\,ds = \int_\gamma \varphi(x)\,ds$$

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Falls γ eine C^1-Kurve ist:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(x)\cdot dx\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b \|f(\gamma(t))\|\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= \int_\gamma \|f(x)\|\cdot ds \\ &\leq \sup_{x\in|\gamma|}\|f(x)\|\cdot\int_\gamma ds \\ &= \sup\|f(x)\|\cdot L(\gamma)\end{aligned}$$

(d) ✓

(e) Für C^1-Kurven:
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha := -\gamma$, d. h. $\alpha(t) = \gamma(-t)$ für $-b \le t \le -a$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\gamma} f(x)\cdot dx &= \int\limits_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\cdot(-\gamma'(-t))\,dt \\
&= \left|\begin{matrix}\text{Substitution}\\ \tau=-t\\ d\tau=-dt\end{matrix}\right| \\
&= \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,d\tau \\
&= -\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)\,d\tau \\
&= -\int\limits_{\gamma} f(x)\cdot dx
\end{aligned}$$

Für das Integral nach der Bogenlänge gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,ds &= \int\limits_{-b}^{-a} \varphi(\gamma(-t))\|-\gamma'(-t)\|\,dt \\
&= -\int\limits_{a}^{b} \varphi(\gamma(\tau))\cdot\|\gamma'(\tau)\|\,d\tau \\
&= \int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,ds
\end{aligned}$$

9.5 Kurvenintegrale und Stammfunktionen

9.5.1 Definition: Vektorfeld, Potential

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann nennt man f auch *Vektorfeld*. f heißt *Gradientenfeld*, wenn eine Funktion $F \in C^1(D)$ existiert mit $\operatorname{grad} F = F' = f$. F heißt auch *Stammfunktion*, $-F = U$ heißt auch *Potential* von f.

9.5.2 Bemerkung

Für $n = 1$ und $D = (a,b)$ ist jedes Vektorfeld auch ein Gradientenfeld (Hauptsatz):

$$F(x) := \int\limits_{c}^{x} f(t)\,dt, \quad F' = f$$

9.5.3 Beispiel

Sei $n = 3$.

Betrachte einen Massepunkt M in $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und einen Massepunkt m in $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Gravitationsfeld (mit Gravitationskonstante γ):

$$-\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{x}{\|x\|^3}$$

Gravitationspotential (für $x \neq 0$):

$$U = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{\|x\|}$$

$$U_{x_i} = -\gamma m M \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-3/2} \cdot 2x_i = \gamma m M \frac{x_i}{\|x\|^3}$$

9.5.4 Satz

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ ein Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

(a) f ist ein Gradientenfeld, d. h. f besitzt eine Stammfunktion.

(b) $\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$ ist nur abhängig von Anfangs- und Endpunkt von γ.

(c) $\int\limits_\gamma f(x)\, dx = 0$ für geschlossene Kurven.

In (b) und (c) ist $\gamma\colon [a, b] \to D$, (stückweise) stetig differenzierbar.

Beweis:

(a)⇒(c): Sei $F' = f$ und γ sei C^1. Dann ist

$$\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int\limits_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

(b)⇒(a): Sei $\xi \in D$ fest.

Für $x \in D$ sei γ_x ein beliebiger Weg von ξ nach x, $\gamma_x \in C^1$.

$$F(x) = \int\limits_{\gamma_x} f(y) \cdot dy$$

ist unabhängig von γ_x. Außerdem ist

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_s f(y) \cdot dy.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ dazu so, daß $K(x,\delta) \subseteq D$ und $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ für alle $y \in K(x,\delta)$ ist.

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x)| &= \left| \int\limits_s (f(y) - f(x))\, dy \right| \\ &\le \int\limits_s \varepsilon \cdot ds = \varepsilon \cdot \|h\| \end{aligned}$$

Also ist $F' = f$.

(c)⇒(b): Seien γ_1 und γ_2 Wege in D von α nach β.
$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ ist geschlossen. Damit ist

$$0 = \int\limits_\gamma f(x)\, dx = \int\limits_{\gamma_1} f(x)\, dx - \int\limits_{\gamma_2} f(x)\, dx.$$

9.5.5 Bemerkungen

(1) Eine Stammfunktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, denn sind F und F_1 Stammfunktionen, so ist $(F - F_1)' = 0$, also ist $F - F_1$ konstant.

(2) $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ hat keine Stammfunktion, denn:

(3) Ist $f \in C^1(D)$ ein Gradientenfeld, so gilt

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} \tag{9.2}$$

für $\mu, \nu = 1, \dots, n$.
(9.2) ist notwendig für Stammfunktionen.
Beweis: Sei $F' = f$ und $f_\nu = \frac{\partial F}{\partial x_\nu}$. Dann ist

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}.$$

(4) Sei

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= -\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Es liegt Gleichheit vor, aber f ist kein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Setze $\gamma(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}(-r\sin t, r\cos t) \cdot r(-\sin t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t) + (\cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

9.5.6 Lemma von Poincaré

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Gleichung (9.2). Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis: OBdA sei $\xi = 0$ und D sei sternförmig bzgl. ξ. Setze

$$F(x) := \int_{s_x} f(y) \cdot dy.$$

Dabei ist $s_x \colon [0,1] \to D$ mit $s_x(t) = tx$. Damit ist

$$F(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x\, dt = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 f_\nu(tx)\, dt.$$

Ist $F \in C^1(D)$? Dies wird später gezeigt.
Ist $F' = f$. Zeige dies jetzt: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_\mu} &= \int_0^1 f_\mu(tx)\, dt + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_0^1 f_\nu(xt)\, dt \\ &\overset{\odot}{=} \int_0^1 f_\mu(tx)\, dt + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\nu(xt)\, dt\end{aligned}$$

Dabei wird $\odot$ später gezeigt.
Mit

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\nu(tx)\, dt = \int_0^1 t \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(tx)\, dx = \int_0^1 t \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx)\, dx$$

gilt dann:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\mu} = \int_0^1 \left(f_\mu(tx) + \sum_{\nu=1}^n t x_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx) \right) dt.$$

Mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[tf_\mu(tx)\right] &= f_\mu(tx) + t\frac{\partial}{\partial t}(f_\mu(tx_1,\ldots,tx_n)) \\ &= f_\mu(tx) = t\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx)x_\nu\end{aligned}$$

folgt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_\mu} &= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\left[t\cdot f_\mu(tx)\right]\,dt \\ &= tf_\mu(tx)\Big|_0^1 = f_\mu(x).\end{aligned}$$

Zeige nun, daß $\odot$ gilt, d. h. gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\limits_0^1 f_\nu(tx)\,dt \stackrel{?}{=} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[f_\nu(tx)\right]\,dt = \int\limits_0^1 t\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(tx)\,dt$$

Setze $\varphi(s,t) := f_\nu(tx_1,\ldots,tx_{\mu-1},ts,tx_{\mu+1},\ldots,tx_n)$.
Gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_0^1 \varphi(s,t)\,dt \stackrel{?}{=} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t)\,dt$$

9.5.7 Hilfssatz

Sei $\varphi\colon (a,b)\times[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und $\varphi_s\colon (a,b)\times[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\Phi(s) = \int\limits_0^1 \varphi(s,t)\,dt$$

stetig differenzierbar in (a,b) und es ist

$$\Phi'(s) = \int\limits_0^1 \varphi_s(s,t)\,dt.$$

Beweis: Sei $s\in(a,b)$ fest.
φ_s ist gleichmäßig stetig auf dem kompakten Rechteck der Form $[x-\delta,s+\delta]\times[0,1]$.
Sei $\varepsilon>0$. Dazu existiert ein $\delta>0$, $\delta\le\sigma$ mit

$$|\varphi_s(s,t)-\varphi_x(u,t)|<\varepsilon \text{ für } |s-u|<\delta,\ 0\le t\le 1.$$

Sei nun $0 < |h| < \delta$. Dann ist

$$\left|\frac{\Phi(s+h)-\Phi(s)}{h} - \int_0^1 \varphi_s(s,t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 \Big[\underbrace{\frac{\varphi(s+h,t)-\varphi(s,t)}{h}}_{\substack{=\varphi_s(s+\theta\cdot h,t)\\ \text{mit } 0<\theta=\theta(h,t)<1}} - \varphi_s(s,t)\Big]\,dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 \underbrace{|\varphi_s(s+\theta\cdot h,t)-\varphi_s(s,t)|}_{<\varepsilon}$$
$$< \varepsilon \checkmark$$

9.5.8 Praktische Berechnung einer Stammfunktion

Gesucht ist Stammfunktion für

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \ f \in C^1.$$

1. Prüfe nach, ob
$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$$
ist.

2. Halte $x_2, \ldots, x_n$ fest. Suche dann eine Stammfunktion F bezüglich x_1 mit Integrationskonstante $C(x_2, \ldots, x_n)$.
Es muß dann gelten:
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + C(x_2, \ldots, x_n)) = F_{x_2} + C_{x_2} \stackrel{!}{=} f_2.$$
Wiederhole dieses dann $(n-1)$-mal.

9.5.9 Beispiele

1. Sei $n = 2$ und
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$
f hat keine Stammfunktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, erfüllt aber die Gleichung (9.2).
Also existiert eine Stammfunktion in jedem Sterngebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nehme z. B. $\{(x,y)\colon y > 0\}$.
Berechnung der Stammfunktion F:
$$F_x \stackrel{!}{=} \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
F &= \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \\
&= \left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ x = yt \\ dx = y\,dt \end{array} \right| \\
&= \int -\frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan\frac{x}{y} + C(y).
\end{aligned}
$$

Es muß weiter gelten:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+y^2} &\overset{!}{=} F_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) + C'(y) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Also ist $C'(y) = 0$ und damit

$$
F(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + c.
$$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $u \in C^1(D)$.
Gesucht ist $v \in C^1(D)$, so daß die Cauchy-Riemann-Gleichung

$$
\begin{aligned}
u_x &= v_y \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}
$$

erfüllt ist. D. h., daß eine Stammfunktion von $\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$ gesucht wird.
Wenn $u \in C^2(D)$ ist, muß

$$
(-u_y)_y = (u_x)_x \iff u_{xx} + u_{yy} = 0
$$

erfüllt sein, damit eine Stammfunktion existiert. Eine notwendige Bedingung ist also

$$
u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } D,
$$

d. h. u ist harmonisch.
Konkret: Sei

$$
u(x,y) = e^x \cos y + xy.
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
u_x &= e^x \cos y + y & u_y &= -e^x \sin y + x \\
u_{xx} &= e^x \cos y & u_{yy} &= -e^x \cos y
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.
$$

Damit ist u harmonisch und die Cauchy-Riemann-Gleichung ist lösbar.
Setze

$$
v_x = -u_y = e^x \sin y - x.
$$

Halte nun y fest. Dann ist

$$v = e^x \sin y - \frac{x^2}{2} + C(y)$$

und damit muß dann noch gelten

$$v_y = e^x \cos y + C'(y) \overset{!}{=} e^x \cos y + y$$

$$\iff C'(y) = y \iff C(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

Zusammen ist also

$$v = e^x \sin y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

10 Das Lebesgue-Integral[1]

10.1 Nullmengen und Treppenfunktionen

10.1.1 Definition: Intervall im $\mathbb{R}^n$

Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu < x_\nu < b_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

ein offenes und

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

ein abgeschlossenes Intervall.
Im $\mathbb{R}^2$ ist ein Intervall ein Rechteck, im $\mathbb{R}^3$ ein Quader.
Jede Menge $I \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$ für passende $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißt Intervall.

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$$

heißt *elementarer Inhalt* von I.

10.1.2 Definition: Nullmenge

$N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich oder abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ gibt mit $N \subseteq \bigcup\limits_k I_k$ und $\sum\limits_k m(I_k) < \varepsilon$.

10.1.3 Beispiele und Bemerkungen

(a) Einpunktige Mengen sind Nullmengen.

(b) Sind $N_1, N_2, \ldots$ endlich viele oder abzählbar viele Nullmengen, dann ist auch $N = \bigcup\limits_k N_k$ wieder eine Nullmenge.

(c) Hyperebenen $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_\nu = \text{const.}\}$ für ein ν sind Nullmengen. Ebenso sind Ränder von Intervallen Nullmengen.

(d) In der Definition der Nullmenge kann man die I_k als offen annehmen.

(e) Kompakte Nullmengen kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ durch endlich viele $I_1, \ldots, I_\ell$ überdecken mit $\sum\limits_{k=1}^{\ell} m(I_k) < \varepsilon$.

(f) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist

$$\text{Graph}(f) = \{x, f(x)) : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$.

[1] Version 4.7 vom 19. Dezember 2002

Beweis:

(a) ✓

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. zu $k = 1, 2, \dots$ Intervalle $I_{k,\nu}$ mit $N_k \subseteq \bigcup\limits_\nu I_{k,\nu}$ und $\sum\limits_\nu m(I_{k,\nu}) < \varepsilon \cdot 2^{-k}$.
Sei $I_1, I_2, \dots$ Anordnung aller Intervalle $I_{k,\nu}$ für $k = 1, 2, \dots$ und $\nu = 1, 2, \dots$. Es ist damit

$$N \subseteq \bigcup_k \bigcup_\nu I_{k,\nu} = \bigcup_\nu I_\nu$$

und

$$\sum_\nu m(I_\nu) = \sum_k \underbrace{\sum_\nu m(I_{k,\nu})}_{<\varepsilon 2^{-k}} < \sum_k \varepsilon \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = \varepsilon.$$

(c) Als Aufgabe: Setze

$$H_k := H \cap \underbrace{[-k, k] \times \cdots \times [-k, k]}_{n\text{-mal}}.$$

Weise nach: H_k ist Nullmenge. Dann ist H Vereinigung der H_k.

(d) Sei $\varepsilon > 0$ und $I_1, I_2, \dots$ mit $N \subseteq \bigcup\limits_k I_k$ und $\sum\limits_k m(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Umschreibe jedes I_k mit einem offenen und größeren Intervall J_k:
Wähle J_k so, daß $I_k \subseteq J_k$ und $m(J_k) < m(I_k) + \varepsilon 2^{-k-1}$ ist.
Dann ist $N \subseteq \bigcup\limits_k J_k$. J_k ist offen und

$$\sum_k m(J_k) < \underbrace{\sum_k m(I_k)}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\sum_k \varepsilon 2^{-k-1}}_{\leq \varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(e) Siehe Literatur

(f) Aufgabe: Übungsblatt 1
Bilde die Differenz von Ober- und Untersumme bei einer Zerlegung, verfeinere die Zerlegung dann immer mehr.

10.1.4 Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.
2. Es gibt Intervalle $I_1, I_2, \dots$ mit $\sum m(I_k) < \infty$, so daß jedes $x \in N$ in unendlich vielen I_k enthalten ist.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle ℓ so, daß

$$\sum_{k=\ell}^\infty m(I_k) < \varepsilon$$

Es ist dann immer noch

$$N \subseteq \bigcup_{k=\ell}^{\infty} I_k.$$

Also ist N Nullmenge.

„⇒“: Sei $\varepsilon = 1$ und $k \in \mathbb{N}$.
Es ex. Intervalle $I_{k,1}, I_{k,2}, \ldots$ mit $N \subseteq \bigcup_{\nu} I_{k,\nu}$ und $\sum_{\nu} m(I_{k,\nu}) < 2^{-k}\varepsilon$. $I_1, I_2, \ldots$ sei Abzählung der $I_{k,\nu}$. Dann ist

$$\sum_{\nu} m(I_\nu) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Sei nun $x \in N$. Für $k = 1, 2, \ldots$ ex. ν_k mit $x \in I_{k,\nu_k} = I_{j(k)}$.
$\ell \neq k \;\Rightarrow\; j(\ell) \neq j(k)$, d. h. $x \in I_{j(1)}, I_{j(2)}, \ldots$. Alle $I_{j(k)}$ sind verschieden.

10.1.5 Sprechweise: fast überall

Sei E eine Eigenschaft, die für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt ist, d. h. $E(x)$ trifft zu oder nicht. E gilt *fast überall* (f. ü.), wenn $\{x\colon E(x) \text{ ist falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

10.1.6 Beispiel

Sei $E(x) =$„Eine Koordinate von x ist irrational“.
Die Menge $\{x\colon E(x) \text{ ist falsch}\} = \mathbf{Q}^n$ ist abzählbar, also eine Nullmenge.

10.1.7 Definition: Treppenfunktion

Eine beschränkte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es endlich viele Intervalle $I_1, \ldots, I_k$ und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\varphi(x) = c_j$ in I_j^0 und $\varphi(x) = 0$ außerhalb von $\bar{I}_1 \cup \cdots \cup \bar{I}_k$ ist. Auf den Rändern darf φ beliebige beschränkte Werte annehmen.

10.1.8 Satz

Mit φ und ψ sind auch $\lambda\varphi$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi + \psi$, $\max(\varphi, \psi)$, $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$, $\varphi^- = \max(-\varphi, 0)$ und $|\varphi|$ Treppenfunktionen.

10.1.9 Bemerkung

Die Treppenfunktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Genauer: Es ist ein Untervektorraum zum Vektorraum der Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
$\overline{\{x\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ heißt *Träger* von φ. Der Träger ist kompakt.

10.1.10 Definition: Lebesgue-Integral bei Treppenfunktionen

Ist φ eine Treppenfunktion, so heißt

$$\int \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot m(I_j)$$

Lebesgue-Integral von φ.

10.1.11 Bemerkung

1) Ist $n = 1$ und $I_1, \ldots, I_k \subseteq [a, b]$, so entspricht

$$\int \varphi = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

dem Riemann-Integral.

2) Sind die $c_j \geq 0$, dann ist $c_j \cdot m(I_j)$ der Inhalt von $\underbrace{I_j \times [0, c_j]}_{\subseteq \mathbb{R}^{n+1}}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$.

10.1.12 Satz: Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Das Lebesgue-Integral hat folgende Eigenschaften:

(1) $\int \lambda\varphi = \lambda \int \varphi$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $\int \varphi + \psi = \int \varphi + \int \psi$

(3) $\varphi \overset{\text{f.ü.}}{\leq} \psi \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$

(4) $\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|$

Beweis:

(1) Aufgabe

(2) Aufgabe

(3) Sei $\varphi \leq \psi$ fast überall. Die gemeinsamen Konstanzintervalle seien $I_1, \ldots, I_k$.
Für I_1 gilt: $c_1 = \varphi(x) \leq \psi(x) = d_1$ in I_1^0.
Annahme: $c_1 > d_1$. Dann ist $\varphi > \psi$ in I_1^0. Da aber I_1 keine Nullmenge ist ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung.

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j m(I_j) \leq \sum_{j=1}^{k} d_j m(I_j) = \int \psi$$

(4) Folgt aus (3), denn es ist $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$. Also ist -$\int |\varphi| \leq \int \varphi \leq \int |\varphi|$.

10.1.13 Lemma A

Seien φ_k Treppenfunktionen (TF) mit:

1. $\varphi_k \geq 0$ fast überall,
2. $\varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_k(x)$ fast überall,
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$.

Dann gilt für $k \to \infty$:

$$0 \leq \int \varphi_k \to 0.$$

Beweis: Die Konstanzintervalle von φ_k seinen $I_{k\nu}$ mit $\nu = 1, \ldots, \ell_k$.

$$N = \{x \colon \varphi_k \not\to 0\} \cup \bigcup_{k,\nu} \partial I_{k\nu}$$

ist nach Voraussetzung eine Nullmenge. Es ist

$$\text{Träger}(\varphi_k) \subseteq \text{Träger}(\varphi_1) = MA = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)$$

$$B = \sum_{j=1}^{\ell_1} m(I_{1j}).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$.
Dann existieren offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $N \subseteq \bigcup\limits_i J_i$ und $\sum\limits_i M(J_i) < \varepsilon$.
Sei $x \neq N$. Dann existiert ein Index $k(x)$ mit $\varphi_k(x) < \varepsilon$ für $k \geq k(x)$.
Sei $I_{(x)}$ das Konstanzintervall von $\varphi_k(x)$, das x enthält. Dann ist $\varphi_{k(x)}(y) < \varepsilon$ für alle $<\in I_{(x)}$ und $\varphi_k(y) < \varepsilon$ für alle $y \in I_{(x)}$ und $k \geq k(x)$.
Es ist (M ist kompakt):

$$M \subseteq M \setminus N \cup N \subseteq \bigcup_{x\in M\setminus N} I(x) \cup \bigcup_i J_i.$$

Mit dem Satz von Heine-Borel (7.5.11 auf Seite 186) gilt dann:
Endlich viele $J_1, \ldots, J_p$ und $I_{(x^{(1)})}, \ldots, I_{(x^{(q)})}$ überdecken ebenfalls m. Setze

$$k_0 = \max(k(x^{(1)}, \ldots, k(x^{(q)}).$$

Für $k \geq k_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \varphi_k &\leq \sum_{j=1}^{q} m(I_{(x^{(j)})} \cdot \varepsilon + \sum_{i=1}^{p} m(J_i) \cdot A \\ &\leq \varepsilon \cdot B + A \cdot \varepsilon = (A + B) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

10.1.14 Lemma B

Seien φ_k Treppenfunktionen mit

1. $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ fast überall

2. $\int \varphi_k \leq A$ für alle k.

Dann ist
$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

Beweis: OBdA seien alle $\varphi_k \geq 0$ fast überall. Sonst betrachte $\varphi_k - \varphi_1$ anstelle von φ_k. Die Konstanzintervalle von φ_k seien $I_{k\nu}$ mit $\nu = 1, \ldots, \ell_k$.
$$N = \{x\colon (\varphi_k(x)) \text{ ist nicht monoton wachsend}\} \cup \bigcup_{k,\nu} \partial I_{k\nu}$$
ist eine Nullmenge. Sei
$$E = \{x \neq N\colon \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = +\infty\}.$$
Sei $\varepsilon > 0$. Für $k = 1, 2, \ldots$ sei
$$E_k := \{x \notin N\colon \varphi_k(x) > \frac{A}{\varepsilon}\}.$$
Es ist dann
$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$
E_1 wird überdeckt durch endlich viele abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots, I_{p_1}$ mit $\varphi_1 > A/\varepsilon$. Dabei sind $I_1^0, \ldots, I_{p_1}^0$ die Konstanzintervalle von φ_1. Möglicherweise ist $E_1 = \emptyset$.
Es ist $E_k \subseteq E_{k+1}$. Für $x \in E_k$ gilt: $\varphi_k(x) > A/\varepsilon$, $\varphi_{k+1} \geq \varphi_k(x)$.
Sei gezeigt, daß E_k von den abgeschlossenen Intervallen $I_1, \ldots, I_{p_1}, \ldots, I_{p_k}$ (dies ist wahr für $k = 1$) mit $I_\nu \cap I_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \nu$ und $\varphi_k(x) > A/\varepsilon$ in I_ν^0 überdeckt wird.
Dann wird $E_{k+1} \setminus E_k$ überdeckt durch $I_{p_k+1}, \ldots, I_{p_{k+1}}$, abgeschlossen mit $I_\mu^0 \cap I_\nu^0 = \emptyset$ und $\varphi_{k+1}(x) > A/\varepsilon$ in I_ν^0.
Betrachte nun das Intervall I_ν für $\nu \leq p_k$ und I_μ für $\mu \leq p_k$.
In I_ν^0 ist $\varphi_{k+1} > A/\varepsilon$ und in I_μ^0 ist $\varphi_k > A/\varepsilon$.
Es ist $E_k \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{p_k}$ und $\sum\limits_{j=1}^{p_k} m(I_j) \cdot \frac{a}{\varepsilon} < \int \varphi_k \leq A$.
Also ist $\sum\limits_{j=1}^{p_k} m(I_j) < \varepsilon$ für alle k und damit auch $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \varepsilon$.
Da auch $E \subseteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \sum\limits_{j=1}^{\infty} I_j$ ist, ist E eine Nullmenge.

10.2 Meßbare und integrierbare Funktionen

10.2.1 Definition: meßbar, L^+

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(a) heißt *meßbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen (φ_k) für $k = 1, 2, \ldots$ gibt mit $\varphi_k(x) \to f(x)$ fast überall für $k \to \infty$

(b) gehört zu einer Klasse $L^+ = L^+(\mathbb{R}^n)$, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen (φ_k) gibt mit

1.) $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$ fast überall

2.) $\int \varphi_k \leq A$ für alle k

3.) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(X) = f(x)$ fast überall.

(c) Für $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$\int f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k$$

das *Lebesgue-Integral* von f.

10.2.2 Bemerkungen und Beispiele

(a) Ist $f \in L^+$, dann ist f meßbar.

(b) Ist $f \in L^+$, dann ist $\varphi_k(x) \le f(x)$ fast überall. „$\le$" ist dort falsch, wo $\lim_{\varphi_k(x)} > f(x)$ ist und wo die Monotonie verletzt ist.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall stetig, so ist f meßbar.

(d) Die Integraldefinition für $f \in L^+$ ist unabhängig von φ_k, genauer: Ist fast überall $f \le G$ für $f, g \in L^+$, dann ist $\int f \le \in g$.

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Sei zunächst überall $f \ge 0$. Überdecke $\mathbb{R}^n$ durch abgeschlossene Würfel der Kantenlänge 2^{-k} für $k = 1, 2, \ldots$. Diejenigen Würfel, die in $[-k,k] \times \cdots \times [-k,k]$ liegen, seien $I_{k1}, \ldots, I_{k\ell_k}$. Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \inf f(I_{k\nu}) & \text{in } I^0_{k\nu} \text{ mit } \nu = 1, \ldots, \ell_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$0 \le \varphi_k(x) \le f(x) \text{ überall}$$

und

$$\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x) \text{ fast überall.}$$

Zeige nun: $\varphi_k(x) \to f(x)$ in allen Stetigkeitspunkten von f, also fast überall, ausgenommen in $\bigcup\limits_{k,j} \partial I_{kj}$, einer Nullmenge (als Vereinigung von Rändern von Intervallen).
Sei f stetig in x mit $x \neq \bigcup\limits_{k,j} \partial I_{kj}$ und $\varepsilon > 0$.
Dazu existiert eine Kugel $K(x,\delta)$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } y \in K(x,\delta).$$

Wähle nun k so groß, daß

$$K(x,\delta) \subseteq [-k,k] \times \cdots \times [-k,k]$$

ist und dasjenige I_{kj}, das x enthält, in $K(x,\delta$ enthalten ist.
In I_{kj} gilt nun

$$f(x) \ge \varphi_k(x) = \inf_{y \in I_{kj}} f(y) \ge f(x) - \varepsilon,$$

d. h. $|f(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon$ für diese k, d. h. $\varphi_k(x) \to f(x)$.✓
Für allgemeines f wird f in $f = f^+ - f^-$ aufgeteilt und jeweils φ_k berechnet.

(d) Zu f, g gehören φ_k und ψ_k wie in der Definition. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ fest:

$$\varphi_\ell = \psi_k + (\varphi_\ell - \psi_k) \leq \psi_k + (\varphi_\ell - \psi_k)^+.$$

Setze

$$\chi_k := (\varphi_\ell - \psi_k)^+ \geq \chi_{k+1} \text{ fast überall.}$$

Es ist

$$\chi_k(x) \xrightarrow{\text{f.ü.}} (\underbrace{\varphi_\ell(x)}_{\leq f(x)\text{f.ü.}} - g(x))^+ \overset{\text{f.ü.}}{\leq} (f(x) - g(x))^+ = 0 \text{ fast überall.}$$

Aus Lemma A (10.1.13) folgt dann

$$\int \chi_k \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

$$\int \varphi_\ell \leq \int \psi_k + \int \chi_k \to \int g + 0$$

für alle ℓ. Zusammen gilt für $\ell \to \infty$:

$$\int f \leq \int g.$$

10.2.3 Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{für } x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $f \in L^+$, denn es ist überall $f \geq 0$. Konstruiere φ_k wie im Beispiel zuvor. Setze

$$I^k_{\mu\nu} = [\mu \cdot 2^{-k}, (\mu+1) \cdot 2^{-k}] \times [\nu \cdot 2^{-k}, (\nu+1) \cdot 2^{-k}]$$

für $\mu, \nu = 0, \ldots, k \cdot 2^k - 1$. Es ist

$$\inf_{I^k_{\mu\nu}} f(x,y) = e^{-((\mu+1)+(\nu+1))2^{-k}} = \varphi_k(x) \text{ in } (I^k_{\mu\nu})^0.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}\int \varphi_k &= \sum_{\mu,\nu=0}^{k2^k-1} e^{-(\mu+\nu+2)2^{-k}} 4^{-k} = \sum_{\mu,\nu=1}^{k2^k} 4^{-k} e^{-\mu 2^{-k}} e^{-\nu 2^{-k}} \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{k2^k} 2^{-k} e^{-\nu 2^{-k}} \right)^2 = (e^{-2^{-k}})^2 \cdot \left(\frac{1-e^{-k}}{1-e^{-2^{-k}}} \cdot 2^{-k} \right)^2 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 1 \cdot 1^2 \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{t}{1-e^{-t}} \right)^2 = 1.\end{aligned}$$

Später wird gezeigt:

$$\int e^{-x-y} = \int_0^\infty e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y}\,dy$$

10.2.4 Satz

Mit f und g sind auch

(a) $f+g$, λf für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $f^+ = \max(0, f)$, $f^- = \max(0, -f)$, $max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $|f|$ meßbar.

(b) $f+g$, λf für $\lambda \geq 0$, f^+ und $\max(f,g)$ zu L^+ gehörig. Es gilt dann

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

Beweis:

(a) $f+g$, λf über Regeln für Grenzwerte.
f^+: Sei $\varphi_k \to f$ fast überall, dann ist $\varphi_k^+ \to f^+$ fast überall.
$\max(f,g)$: Sei $\varphi_k \to f$ und $\psi_k \to g$ f. ü. Dann ist $(\max(\varphi_k, \psi_k) \to \max(f,g)$ f. ü.

(b) Zu f und g gehören (φ_k) und (ψ_k) mit

$$\varphi_k \leq \varphi_{k+1} \text{ f. ü.}, \varphi_k \to f \text{ f. ü. und}$$
$$\int \varphi_k \leq A \text{ für alle } k.$$

Entsprechendes gilt für ψ_k.

$f+g$: Setze $\chi_k = \varphi_k + \psi_k$. Dann ist $\chi_k \to f+g$ fast überall und

$$\int \chi_k = \int \varphi_k + \int \psi_k \leq A + B.$$

λf: Für $\lambda \geq 0$ ist $\chi_k = \lambda\varphi_k \to \lambda f$ f. ü. und $\lambda\varphi_k \leq \lambda\varphi_{k+1}$ f. ü.

$$\int (\lambda\varphi_k) = \lambda \int \varphi_k \leq \lambda A.$$

f^+: Sei $\chi_k = \varphi_k^+$. Es ist

$$\varphi_k = \varphi_k - \varphi_1 + \varphi_1 \leq \underbrace{\varphi_k - \varphi_1}_{\geq 0 \text{f. ü.}} + \underbrace{\varphi_1^+}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist $\varphi_k^+ \leq \varphi_k - \varphi_1 + \varphi_1^+$ fast überall und damit

$$\int \chi_k \leq \int (\varphi_k - \varphi_1) + \int \varphi_1^+ = \underbrace{\int \varphi_k}_{\leq A} - \underbrace{\int \varphi_1 - \int \varphi_1^+}_{\text{fest}}.$$

$\max(f,g)$: Setze $\chi_k = \max(\varphi_k, \psi_k)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \chi_k &\leq \max(\varphi_k - \varphi_1, \psi_k - \psi_1) + \max(\varphi_1, \psi_1) \\ &\leq \max(\varphi_k - \varphi_1, \psi_k - \psi_1) + \max(\varphi_1^+, \psi_1^+) \\ &\leq \varphi_k - \varphi_1 + \psi_k - \psi_1 + \varphi_1^+ + \psi_1^+ \end{aligned}$$

$$\int \chi_k \leq \int \varphi_k + \int \psi_k + \text{const} \leq A + B + \text{const}.$$

10.2.5 Definition: L

Definiere

$$L = L(\mathbb{R}^n) := \{f \colon f = f_1 - f_2 \text{ mit } f_1, f_2 \in L^+\}.$$

Für $f \in L$, d. h. $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+$ heißt

$$\int f := \int f_1 - \int f_2$$

Lebesgue-Integral von f. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung $f = f_1 - f_2$:
Sei $f = g_1 - g_2$ mit $g_1, g_2 \in L^+$ und $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$.
Dann ist $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Dabei ist $f_1 + g_2 \in L^+$ und $g_1 + f_2 \in L^+$.
Also ist $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$
und damit $\int f_1 + \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$.

10.2.6 Bemerkung

(a) Ist $f \in L$, dann ist f meßbar.

(b) Zu $f \in L$ und $\varepsilon > 0$ existieren $f_1, f_2 \in L^+$ mit $f = f_1 - f_2$, $f_2 \geq 0$ fast überall und $\int f_2 < \varepsilon$.

Beweis:

(a) Klar.

(b) Sei $f = g_1 - g_2$ mit $g_1, g_2 \in L^+$. Zu g_1 und g_2 gehören die Folgen (φ_k) und (ψ_k) von Treppenfunktionen.
Damit existiert eine Treppenfunktion ψ mit $\psi \leq g_2$ fast überall und $\in \psi > \int g_2 - \varepsilon$. Z. B. ist $\psi = \psi_k$ für ein großes k.
Setze $f_2 := g_2 - \psi$ und $f_1 := g_1 - \psi$.
Es sind $f_1, f_2 \in L^+$ und

$$f_1 - f_2 = g_1 - \psi - (g_2 - \psi) = g_1 - g_2) \int f.$$

Da $\psi \leq g_2$ ist, ist $f_2 = g_2 - \psi \geq 0$ fast überall und

$$0 \leq \int f_2 = \int (g_2 - \psi) = \int g_2 - \int \psi < \varepsilon.$$

10.2.7 Aufgabe

Seien $f, g \in L$. Zeige folgende Aussagen:

1. Ist $f \leq g$ fast überall, dann ist $\int f \leq \int g$.
2. Ist $f = 0$ fast überall, dann ist $\int f = 0$.
3. Ist $\int |f| = 0$, dann ist $f = 0$ fast überall.

10.2.8 Satz

Mit f und g sind auch $f+g$, λf für $\lambda \in \mathbb{R}$, f^+, f^-, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $|f|$ in L. Insbesondere ist $L = L(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\int(f+g) = \int f + \int g$ und $\int(\lambda f) = \lambda \int f$.

Beweis: Sei $f = f_1 - f_2$ und $g = g_1 - g_2$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^+$. Es ist dann:

$$f + g = \underbrace{(f_1 + g_1)}_{\in L^+} - \underbrace{(f_2 + g_2)}_{\in L^+} \in L$$
$$\lambda f = \underbrace{\lambda f_1}_{\in L^+} - \underbrace{\lambda f_2}_{\in L^+} \in L \text{ für } \lambda \geq 0$$
$$\lambda f = \underbrace{-\lambda f_2}_{\in L^+} - \underbrace{-\lambda f_1}_{\in L^+} \in L$$

$\int(f+g) = \cdots$ und $\int(\lambda f) = \cdots$ gelten in L^+ und damit auch in L.

$$f^+ = \max(f,0) = \max(f_1 - f_2, 0) = \underbrace{\max(f_1,f_2)}_{\in L^+} - \underbrace{f_2}_{\in L^+} \in L$$
$$f^- = (-f)^+ = \max(-f,0) \in L$$
$$\max(f,g) = (f-g)^+ + g \in L$$
$$\min(f,g) = -\max(-f,-g) \in L$$
$$|f| = f^+ + f^- \in L$$

10.2.9 Beispiel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion*. Wenn U beschränkt ist, dann ist $\chi_U \in L^+ \subseteq L$.

Beweis: Konstruiere eine approximierende Folge (φ_k):
Überdecke $\mathbb{R}^n$ mit einem (abgeschlossenen) Würfelnetz mit der Kantenlänge 2^{-k} für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- 0-te Generation: Würfel der Kantenlänge 1, die in U sind: $W_1, \ldots, W_{n_0}$.
- 1-te Generation: Alle Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{2}$, die in U aber nicht in $W_1, \ldots, W_{n_0}$ liegen: $W_{n_0+1}, \ldots, W_{n_1}$.
- $\vdots$
- $(k+1)$-te Generation: Alle Würfel der Kantenlänge 2^{-k-1}, die in U enthalten sind, aber nicht in $W_1, \ldots, W_{n_k}$ liegen: $W_{n_k+1}, \ldots, W_{n_{k+1}}$.

Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ liegt in einem Würfel der Generation} \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist überall $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ und $\varphi_k = 0$ außerhalb von U.
Es ist überall $\varphi_k \to \chi_U$ für $k \to \infty$ (Aufgabe), weil $U = \bigcup_j W_j$ ist.
Da U beschränkt ist, ist $U \subseteq [-\ell, \ell] \times \cdots \times [-\ell, \ell]$ und damit

$$\int \varphi_k = \sum_{j=1}^{n_k} m(W_j) \leq (2\ell)^n.$$

Also ist $\chi_U \in L^+$.

10.3 Konvergenzsätze

10.3.1 Satz von Beppo Levi

Sei (f_k) eine Folge in $L(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ fast überall und $\int f_k \leq$ const unabhängig von k. Dann ist

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

Für f_k =Treppenfunktionen wurde dies schon in Lemma B, 10.1.14 auf Seite 263, gezeigt. Setzt man dort wo f nicht erklärt war $f(x) = 0$, so ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Beweis:

1. Zunächst für $f_k \in L^+$ mit $k = 1, 2, \ldots$:
   Dann existieren Treppenfunktionen $\varphi_{k,\nu}$ mit

$$\varphi_{k,\nu}(x) \leq \varphi_{k,\nu+1}(x) \text{ fast überall}$$
$$\int \varphi_{k,\nu} \leq \int f_k \leq \text{const. für } k = 1, 2, \ldots \text{ und } \nu = 1, 2, \ldots$$

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\ldots$
φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	$\ldots$	f_1
φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	$\ldots$	f_2
φ_{31}	φ_{32}	φ_{33}	$\ldots$	f_3
φ_{41}	φ_{42}	φ_{43}	$\ldots$	f_4

Setze

$$\varphi_\nu(x) = \max_{1\leq k\leq\nu} (\varphi_{k,\nu}(x)).$$

φ_ν ist Treppenfunktion als Maximum von abzählbar vielen Treppenfunktionen. Da

$$\varphi_{k,\nu} \leq \varphi_{k,\nu+1} \text{ fast überall,}$$

gilt auch

$$\varphi_\nu \leq \varphi_{\nu+1} \text{ fast überall.}$$

Da

$$\varphi_{k,\nu} \leq \begin{cases} f_k & \text{fast überall für } \nu = 1, 2, \ldots \\ f_\nu & \text{für } k \leq \nu \text{ fast überall} \end{cases},$$

ist $\varphi_\nu \leq f_\nu$ fast überall. Also ist

$$\int \varphi_\nu \leq \int f_\nu \leq \text{const.}$$

Nach Lemma B (10.1.14, Seite 263) gilt dann

$$f(x) := \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

Setzt man $f(x) = 0$ sonst, so ist $f \in L^+$ und $\int f = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int \varphi_\nu$.
Da fast überall $\varphi_\nu \leq f_\nu$ ist, ist

$$f(x) \leq \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) \text{ fast überall}$$

und

$$\int f = \lim_{\nu\to\infty} \int \varphi_\nu \leq \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu.$$

Umgekehrt: Für $\nu \geq k$ ist $\varphi_\nu \geq \varphi_{k,\nu}$ fast überall.
Sei nun k fest und $\nu \to \infty$. Dann folgt:

$$f(x) \geq f_k(x) \text{ fast überall.}$$

Für $k \to \infty$ folgt dann:

$$f(x) \geq \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ fast überall.}$$

Aus $\varphi \geq \varphi_{k,\nu}$ folgt auch für $\nu \to \infty$

$$\int f \geq \int \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{k,\nu} = \int f_k$$

$$\Rightarrow \int f \geq \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Ergebnis: $f \in L^+$, $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ fast überall und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

2. Allgemeiner Fall: Sei $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es $\tilde{g}_\nu, \tilde{h}_\nu \in L^+$ (Definition) mit

$$\underbrace{f_\nu - f_{\nu-1}}_{\in L} = \tilde{g}_\nu - \tilde{h}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots \text{ mit } f_0 = 0.$$

Dabei ist $\tilde{h}_\nu \geq 0$ fast überall und nach der Bemerkung 10.2.6 auf Seite 268

$$0 \leq \int \tilde{h}_\nu < 2^{-\nu}.$$

Es ist

$$\tilde{g}_\nu = (f_\nu - f_{\nu-1}) + \tilde{h}_\nu \geq 0 + 0 = 0 \text{ fast überall}$$

und

$$f_k = \sum_{\nu=1}^{k} (f_\nu - f_{nu-1}) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{k} \tilde{g}_\nu}_{=:g_k} - \underbrace{\sum_{\nu=1}^{k} \tilde{h}_\nu}_{=:h_k}.$$

Es sind $g_k, h_k \in L^+$, $g_k \le g_{k+1}$ fast überall und $h_k \le h_{k+1}$ fast überall.

$$\int h_k = \sum_{\nu=1}^{k} \underbrace{\int \tilde{h}_\nu}_{<2^{-\nu}} < \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = 1$$

$$\int g_k = \int f_k + \int h_k \le \text{const} + 1.$$

Nach dem 1. Teil ist $g_k \to g \in L^+$ fast überall und $h_k \to h \in L^+$ fast überall.

$$\int f_k = \int g_k - \int h_k \to \int g - \int h = \int \underbrace{g - h}_{=:f} = \int f.$$

Dabei ist $f = g - h \in L$ und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (g_k(x) - h_k(x)) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ fast überall.}$$

10.3.2 Satz von Beppo Levi für Reihen

Seien $f_1, f_2 \ldots \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \ge 0$ fast überall und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int f_k$ konvergiere.
Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fast überall und es gilt

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

Beweis: Beppo Levi auf die Partialsummen

$$\sum_{j=1}^{k} f_j$$

anwenden.

10.3.3 Beispiel: Charakteristische Funktion

Seien $U_1, U_2, \ldots$ Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ und $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_j$. Setze

$$\chi_{U_j} = \begin{cases} 1 & x \in U_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\chi_{U_j} \in L$ und U ist beschränkt. Außerdem ist $\chi_{U_j} \le \chi_{U_{j+1}}$ und $\int \chi_{U_j} \le \text{const}$.
Später wird $\int \chi_U$ das Maß von U genannt.

10.3.4 Integrabilitätskriterium von Riemann-Lebesgue

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, $f(x) = 0$ für $x < a$ und für $x > b$. Dann gilt

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar über } [a,b] \iff f \text{ ist f. ü. stetig.}$$

Es gilt dann

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int f.$$

Beweis:

„⇒“: Sei f Riemann-integrierbar und Z_k eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit 2^k+1 Teilpunkten und den Teilintervallen I_j^k für $j = 1, \ldots, 2^k$. Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \inf f(I_j^k) & \text{in } (I_j^k)^0 \text{ für } j = 1, \ldots, 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \sup f(I_j^k) & \text{in } (I_j^k)^0 \text{ für } j = 1, \ldots, 2^l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$\int \varphi_k = s(Z_k) \text{ und } \int \Phi_k = S(Z_k).$$

Nach Definition gilt

$$\varphi_k \le f \le \Phi_k \text{ fast überall (in } \mathbb{R} \setminus Z_k)$$

$$\int (\Phi_k - \varphi_k) = S(Z_k) - s(Z_k) \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Setze $\chi_k = \Phi_k - \varphi_k$. Dann ist überall $\chi_k \ge 0$ und $\chi_{k+1} \le \chi_k$.
Wende nun Beppo-Levi auf $(-\chi_k)$ an (Lemma B):

$$-\chi_k \le -\chi_{k+1} \text{ und } \in -\chi_k \le 0.$$

Also ist $-\chi_k \to -g \le 0$ fast überall, $g \in L(\mathbb{R})$ und

$$\int -g = \lim_{k\to\infty} \int -\chi_k = 0,$$

also ist $g = 0$ fast überall.
Zeige: f ist außerhalb der Nullmenge $\{x\colon g(x) \ne 0\} \cup \bigcup\limits_k Z_k$ stetig.
Sei $x \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_k Z_k$ mit $g(x) = 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. k_0 mit $\Phi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon$ für $k \ge k_0$.
Somit gilt für ein festes k:

$$\Phi_k(y) - \varphi_k(y) < \varepsilon \text{ in } (x-\delta, x+\delta) \subseteq \text{Konstanzintervall.}$$

Sei nun $|y - x| < \delta$. Dann ist

$$f(y) - f(x) \overset{\text{Def.}}{\le} \Phi_k(y) - \underbrace{\varphi_k(y)}_{=\varphi_k(x)} < \varepsilon.$$

Mit Vertauschung von x und y ist

$$f(x) - f(y) \le \underbrace{\Phi_k(y)}_{=\Phi_k(x)} - \varphi_k(y) < \varepsilon,$$

d. h. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$.

„$\Leftarrow$“: f sei fast überall stetig und Z_k, φ_k und Φ_k definiert wie im 1. Teil. Es gilt:

$$\int \varphi_k = s(Z_k) \text{ und } \int \Phi_k = S(Z_k)$$

(Früher: f f. ü. stetig, $\varphi_k \nearrow f$ f. ü. und $\Phi_k \searrow f$ f. ü. genauso.
Übrigens ist $\pm f \in L^+$, weil $\int \varphi_k \le \sup f(\mathbb{R})(b-a)$).
Betrachte nun $\Phi_k - \varphi_k$:

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \lim_{k\to\infty} s(Z_k)$$

$$\int -f = \lim_{k\to\infty} \int -\Phi_k = - \lim_{k\to\infty} S(Z_k)$$

$$\Rightarrow \int f = \lim_{k\to\infty} S(Z_k) = \lim_{k\to\infty} s(Z_k).$$

Also ist f Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int f$.

10.3.5 Bemerkung

Ist f nur fast überall in $\mathbb{R}^n$ definiert, dann wird i. A. automatisch $f(x) = 0$ gesetzt, wo f zunächst nicht definiert ist.

10.3.6 Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Sei (f_k) eine Folge von Funktionen $L(\mathbb{R}^n)$ und es gelte $f_k \to f(x)$ punktweise für $k \to \infty$ fast überall. Weiter gebe es ein $g \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $|f_k(x)| \le g(x)$ fast überall für $k = 1, 2, \ldots$ Dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und es ist

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

g heißt *Majorante*. Man sagt, die Konvergenz $f_k \to f$ ist *majorisiert*.

Beweis: Setze punktweise $g_{k\nu} := \max(f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+\nu})$ für festes $k \in \mathbb{N}$. Es ist überall $g_{k\nu} \le g_{k,\nu+1}$ und

$$\int g_{k\nu} \le \int g = \text{const},$$

weil fast überall $|g_{k\nu}| \le g$ ist.
Mit Beppo-Levi ist $g_{k\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} g_k$ fast überall, $g_k \in L(\mathbb{R}^n)$.

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{\nu\to\infty} \max(f_k(x), \ldots, f_{k+\nu}(x))$$
$$= \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, f_\ell(x) = f(x) \text{ fast überall.}$$

Es ist $g_k = \sup(f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots)$, also ist $f_k \le g_k$ und $g_{k+1} \le g_k$.
Setze genauso $h_{k\nu} = \min(f_k, \dots, f_{k+\nu})$. Wende Beppo-Levi auf $(-h_{k\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ an. Dann ist $h_{k\nu} \to h_k$ fast überall, $h_k \le f_k$, $h_{k+1} \ge h_k$ fast überall und $h_k \to f$.
Warum darf Beppo-Levi auf z. B. (h_k) angewandt werden?

$$\begin{aligned} |h_k| &\overset{\text{f.ü.}}{=} \lim_{\nu\to\infty} |h_{k\nu}| = \lim_{\nu\to\infty} |\min(f_k, \dots, f_{k+\nu})| \\ &\le \lim_{\nu\to\infty} \max(\underbrace{|f_k|}_{\le g}, \dots, \underbrace{|f_{k+\nu}|}_{\le g}) \le g \text{ fast überall} \end{aligned}$$

Also ist $\int h_k \le \int g$ =const. Zusammen ist $h_k \le h_{k+1} \le f \le g_{k+1} \le g_k$ fast überall, $h_k \to f$ fast überall und $g_k \to f$ fast überall.
Wende nun Beppo-Levi auf (h_k) bzw. $(-g_k)$ an. Damit ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f = \lim \int h_k = \lim \int g_k$.
Da fast überall $h_k \le f_k \le g_k$ ist, folgt

$$\int f \leftarrow \int h_k \le \int f_k \le \int g_k \to \int f.$$

Also ist $\int f_k \to \int f$.

10.3.7 Folgerungen

Folgerung 1: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und $|f| \le g$ fast überall mit $g \in L(\mathbb{R}^n)$, dann ist f integrierbar.

Folgerung 2: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall stetig und $|f| \le g$ fast überall mit $g \in L(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 3: Sind alle f_k meßbar und ist $f_k \to f$ fast überall, so ist f meßbar.

Beweis:

Folgerung 1: Es existiert eine Treppenfunktion φ_k mit $\varphi_k \to f$ für $k \to \infty$ fast überall. Setze

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{wo } \varphi_k(x) > g(x) \\ -g(x) & \text{wo } \varphi_k(x) < -g(x) \\ \varphi_k(x) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt: $|f_k(x)| \le g(x)$ und

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wo } |f(x)| \le g(x),\ \varphi_k(x) \to f(x) \\ ? & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $\varphi_k(x) \to f(x)$, $|f(x)| \le g(x)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|\varphi_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $k \ge k_0$ und es gibt 3 Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &\le g(x) + \varepsilon && (a) \\ \varphi_k(x) &\ge -g(x) - \varepsilon && (b) \\ -g(x) < \varphi_k(x) &< g(x) && (c) \end{aligned}$$

Setze im Fall (c) $f_k(x) = \varphi_k(x)$. Falls (a) und nicht (c) gilt, setze $g(x) = f_k(x)$. Dann ist $g(x) < \varphi_k(x) < g(x) + \varepsilon$. Für (b) und nicht (c) analog. Dann ist $|\varphi_k - f_k| < \varepsilon$, $|f_k - f| \le |f_k - \varphi_k| + |\varphi_k - f| < 2\varepsilon$. Wende den Satz von Lebesgue an, und es ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 2: Aus fast überall stetig folgt die Meßbarkeit. Weiter mit Folgerung 1.

Folgerung 3: Sei $h \in L(\mathbb{R}^n)$ und überall positiv (Aufgabenblatt)

$$g_k = \frac{f_k h}{h + |f_k|} \text{ ist meßbar nach 10.3.8}$$

$$|g_k| = \underbrace{\frac{|f_k|}{h + |f_k|}}_{<1} \cdot h < h$$

Also ist $g_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und der Satz von Lebesgue ist anwendbar, da

$$g_k \xrightarrow{\text{f. ü.}} g = \frac{fh}{h + |f|}$$

und $|g_k| < h$ ist. Insbesondere ist $g \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$f = \frac{g \cdot h}{h - |g|}$$

ist ebenfalls meßbar nach 10.3.8.

10.3.8 Hilfsüberlegung

Seien $g_1, \dots, g_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und sei $\Phi \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ stetig mit $\Phi(0) = 0$.
Dann ist $\Phi(g_1(x), \dots, g_p(x)) = \varphi(x)$ ebenfalls meßbar.

Beweis: Es existieren Treppenfuntionen $\psi_{j,k}$ mit $\psi_{j,k} \to g_j$ fast überall für $k \to \infty$ und $j = 1, \dots, p$. Nehme $\Phi(\psi_{1,k}, \psi_{2,k}, \dots, \psi_{p,k}) \to \varphi$ fast überall.

10.3.9 Lemma von Fatou

Es sei $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \geq 0$ fast überall und $\int f_k \leq A$ für alle k. Weiter gelte $f_k \to f$ fast überall für $k \to \infty$. Dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\int f \leq \varliminf_{k \to \infty} \int f_k.$$

ACHTUNG: Dabei kann auch „<“ gelten!.

Beweis: Setze $g_k := \inf(f_k, f_{k+1}, \dots)$. g_k ist wie im Beweis des Satzes von Lebesgue (10.3.6) in $L(\mathbb{R}^n)$, weil fast überall $0 \leq g_k \leq f_k$ ist.

$$f(x) \overset{\text{f.ü.}}{=} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \varliminf_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x).$$

Es ist $g_k \leq g_{k+1}$ und $\int g_k \leq \int f_k \leq A$. Mit Beppo-Levi gilt:

$$\int f = \lim_{k \to \infty} \int g_k \leq \varliminf_{k \to \infty} \int f_k.$$

10.4 Der Satz von Fubini

10.4.1 Vorbemerkungen

(a) Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, $n = p+q$, $p,q > 1$. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$. Dann ist

$$E_x := \{y\colon (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^q$$

und

$$E_y := \{x\colon (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall, $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ und $I_2 \subseteq \mathbb{R}^q$. Setze

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in I^0 \\ 0 & (x,y) \notin \bar{I} \\ \text{beschr} & (x,y) \in \partial I \end{cases}$$

und

$$\psi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy = \begin{cases} m_q(I_2) & x \in I_1^0 \\ 0 & x \notin \bar{I}_1 \\ ? & x \in \partial I_1 \end{cases}.$$

Dabei ist m_q der q-dimensionale Inhalt und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \psi(x)\,dx = m_q(I_2) \cdot m_p(I_1).$$

Es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy \right] dx = m_p(I_1) \cdot m_q(I_2) = m_n(I) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\,d(x,y).$$

(c) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion. Dann gilt nach (b)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \underbrace{\left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy \right]}_{\text{ex. f. ü.}} dx$$

.

10.4.2 Satz von Fubini

Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Beweis: In 10.4.5 ab der Seite 280.

10.4.3 Beispiele

(1) Für $n = 2$. Sei

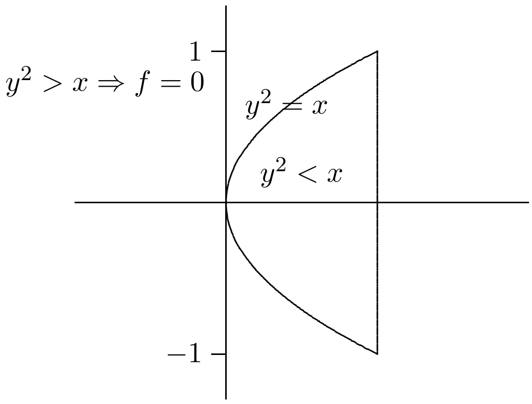
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x,y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{R^2} f(x,y)\,d(x,y) &= 1 \text{ nach früherem Beispiel} \\ &= \int \mathbb{R} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right] dx = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty e^{-x-y}\,dy \right] dx \\ &= \int\limits_0^\infty e^{-x} \underbrace{\left[\int\limits_0^\infty e^{-y}\,dy \right]}_{=1}. \end{aligned}$$

(2) Für $n = 2$. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y^2 & y^2 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$



Die Grenzen, in denen integriert werden muß, sind $0 \le x \le 1$ und $-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x \cdot y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int\limits_0^1 x^{5/2}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Bigg|_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

(3) Für $n = 3$. Sei

$$E = \{(x,y,z) \colon x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

f ist fast überall stetig, also ist f meßbar.
Eine Lebesgue-integrierbare Majorante von f ist

$$g(x,y,z) = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in [0,1]^3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Grenzen der Integrale sind $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 1-x-y$. Es ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} x\, dz\, dy\, dx \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} x(1-x-y)\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \left[xy - x^2 y - \frac{x}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

10.4.4 Hilfssatz zum Beweis des Satzes von Fubini

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge und $N_x = \{y\colon (x,y) \in N\} \subseteq \mathbb{R}^q$. Dann ist $N_x \subseteq \mathbb{R}^q$ Nullmenge für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$.

Beweis: N ist Nullmenge. Also existieren Intervalle $I_1, I_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_n(I_k) < 1,$$

und jedes $(x,y) \in N$ ist in unendlich vielen I_k enthalten. Setze

$$\varphi_k(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in I_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\Phi_k(x) = \int \mathbb{R}^n \varphi_k(x,y)\, dy = m_q((I_k)_x).$$

Dabei existiert Φ_k fast überall in $\mathbb{R}^p$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \sum_{k=1}^{\ell} \Phi_k(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^p} m_q((I_k)_x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} m_n(I_k) < 1. \end{aligned}$$

Für die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{\ell} \Phi_k \right)$ ist $\Phi_k \ge 0$. Die Folge ist wachsend und die Integralfolge ist ≤ 1. Daraus folgt mit Beppo-Levi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) < +\infty \text{ fast überall in } \mathbb{R}^p.$$

Sei nun $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) < +\infty$. Zeige, daß N_x eine Nullmenge ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein k_0, so daß

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k(x) < \varepsilon.$$

Dann ist

$$N_x \subseteq \Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=k_0}^{\infty}}_{\oplus} I_k \Bigg)_x \overset{\odot}{\subseteq} \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{(I_k)_x}_{\otimes}$$

$\oplus$, da x in unendlich vielen I_k ist.
$\odot$ als Aufgabe.
$\otimes$ sind Intervalle in $\mathbb{R}^q$.
Also ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} m_q((I_k)_x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k(x) < \varepsilon \checkmark$$

10.4.5 Beweis des Satzes von Fubini

Der Beweis wird dreigeteilt:

(a) Für Treppenfunktionen f. Schon erledigt in der Vorbemerkung (c).

(b) Für $f \in L^+$: Hier

(c) Allgemein für $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+$:$\checkmark$

Zeige nun die Behauptung für $f \in L^+$:
Sei $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ und φ_k seien Treppenfunktionen mit $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ fast überall, $\varphi_k \to f$ fast überall für $k \to \infty$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\, d(x,y) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d(x,y).$$

Setze

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_k(x,y) \not\to f(x,y)\}.$$

N ist Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Setze

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^p \colon N_x \text{ ist keine } q\text{-dimensionale Nullmenge}\} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

M_1 ist Nullmenge nach dem Hilfssatz.

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\, dy$$

existiert fast überall in $\mathbb{R}^p$, also ist

$$M_2 = \{x \colon \Phi_k(x) \text{ ex. nicht für (irgend-)ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Nullmenge in $\mathbb{R}^p$. Es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\, dx \overset{\substack{\text{Fubini} \\ \text{für TF}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\, d(x,y) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d(x,y) = \text{const.}$$

Sei nun $x \in \{x\colon \Phi_k(x) > \Phi_{k+1}(x)\}$. Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,dy > \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_{k+1}(x,y)\,dy.$$

Also ist $\{y\colon \varphi_k(x,y) > \varphi_{k+1}(x,y)\}$ keine Nullmenge. Nach dem Hilfssatz ist es Nullmenge für fast alle x. Also gilt fast überall $\Phi_k(x) \le \Phi_{k+1}(x)$ und

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^p\colon \Phi_k(x) > \Phi_{k+1}(x) \text{ für (irgend-)ein } k\}$$

ist Nullmenge. Also ist Φ_k fast überall monoton wachsend.
Mit Beppo-Levi gilt dann: $\Phi_k(x) \to g(x) < +\infty$ fast überall für $k \to \infty$, und

$$M_4 = \{x \in \mathbb{R}^p\colon \Phi_k(x) \text{ nicht konvergent oder } \to +\infty\}$$

ist Nullmenge.
$g \in L^+(\mathbb{R}^p)$, $\int \Phi_k \to \int g$.
Für $x \notin M_1$ gilt $\varphi_k(x,y) \to f(x,y)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} g(x) &\overset{x\notin M_4}{=} \lim_{k\to\infty} \Phi_k(x) \overset{x\notin M_2}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,dy \\ &\overset{x\notin M_1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Also ist $g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)$ fast überall in $\mathbb{R}^p$ und $g \in L(\mathbb{R}^p)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^p} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\varphi_k(x,y)}_{\text{TF}}\,dy \right] dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y). \end{aligned}$$

10.4.6 Beispiel

für die Nichtanwendbarkeit des Satzes von Fubini für $n = 2$. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & x,y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige (als Aufgabe)

$$\int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx \neq \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy$$

Damit ist $f \notin L(\mathbb{R}^2)$.

10.4.7 Satz von Tonnelli

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy$$

existiere für fast alle x und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy \right) dx$$

existiere. Dann gilt der Satz von Fubini.

Analogie zum Doppelreihensatz 2.6.8, Seite 42:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \right) < +\infty \Longrightarrow \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \right).$$

Beweis: Zeige $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Setze dafür

$$\varphi_k(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } [-k,k]^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_k(x,y) = \min(k, |f(x,y)| \cdot \varphi_k(x,y)).$$

Es ist $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$, denn f_k ist meßbar und hat $k \cdot \varphi_k$ als integrierbare Majorante. Außerdem ist fast überall $f_k \leq f_{k+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int f_k(x,y)\,d(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \underbrace{f_k(x,y)}_{\substack{\leq |f(x,y)|\cdot\varphi_k(x,y) \\ \leq |f(x,y)|}} \,dy\,dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy\,dx = \text{const.} \end{aligned}$$

Mit Beppo-Levi gilt dann

$$|f(x,y)| = \underbrace{\lim_{k\to\infty} f_k(x,y)}_{\in L(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ fast überall.}$$

Damit ist $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$. Zusammen mit der Voraussetzung, daß f meßbar ist, folgt dann $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

10.4.8 Beispiel

Sei

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 1,\, x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}$$

und

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zu berechnen ist

$$\int f(x,y,z)\,d(x,y,z).$$

Es ist

$$E_z = \begin{cases} \{(x,y)\colon x^2+y^2 < \frac{1}{z12}\} & \text{für } z > 1 \\ \emptyset & \text{für } z \leq 1 \end{cases}.$$

f ist meßbar und f ist unstetig auf ∂E. ∂E ist Nullmenge im $\mathbb{R}^3$ (später).

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int \mathbb{R} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,d(x,y)\,dz$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1 \cdot \chi_{E_z}(x,y) d(x,y)\,dz = \int\limits_1^\infty \pi \frac{1}{z^2}\,dz = \pi.$$

Später wird gesagt: Der Inhalt von E ist π.

10.5 Meßbare Mengen

10.5.1 Def.: Charakteristische Funktion, Meßbarkeit

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von E. E heißt *meßbar*, wenn χ_E meßbar ist. Ist $\chi_E \in L(\mathbb{R}^n)$, so heißt

$$m(E) := \int \chi_E$$

(Lebesguesches) Maß von E.

10.5.2 Bemerkungen

(a) Ist E meßbar, aber χ_E nicht integrierbar, so setzt man $m(E) = +\infty$.

(b) Ist $E_1 \subseteq E_2$ mit meßbarem E_2, dann ist $m(E_1) \leq m(E_2)$, ca $\chi_{E_1} \leq \chi_{E_2}$ ist.

(c) Ist I Intervall, dann ist $m(I)$ der elementare Inhalt von I.

(d) $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Nullmenge, wenn $m(N) = 0$ ist.

(e) Offene und abgeschlossene Mengen sind meßbar.

(f) (i) ∂E ist nicht immer eine Nullmenge. Z. B. sei $E = \mathbf{Q}^n$. Dann ist $\partial E = \mathbb{R}^n$.

(ii) ∂E sei Nullmenge, E^0, $\bar{E}$ sind meßbar und es ist $E^0 \subseteq E \subseteq \bar{E}$. Frage: Wenn F meßbar und N Nullmenge ist, ist dann $E = F \cup N$ meßbar?
Es ist $\chi_F = \chi_E$ fast überall, also ist E meßbar.

Beweis:

(d) **„⇒“:** Sei N Nullmenge. Setze die Treppenfunktion $\varphi_k(x) = 0$ überall. Es ist $\varphi_k(x) \to 0 = \chi_N(x)$ fast überall für $k \to \infty$ und $\int \varphi_k = 0$. Mit Beppo-Levi folgt

$$m(N) = \int \chi_N = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = 0.$$

„⇐“: Setze $\varphi_k = k \cdot \chi_N$. Es ist $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ überall und

$$\int \varphi_k = k \int \chi_N = 0.$$

Beppo-Levi: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) < +\infty$ fast überall $\iff x \notin N$.
Also ist N eine Nullmenge.

(e) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Früher wurde gezeigt: Wenn E beschränkt ist, ist χ_E fast überall stetig, also meßbar. Zu offenem E ist

$$E_k = E \cap (-k, k)^n$$

meßbar und $\chi_{E_k} \to \chi_E$. Damit ist χ_E auch meßbar. Zu abgeschlossenem E ist $F = \mathbb{R}^n \setminus E$ offen und

$$\chi_E = 1 - \chi_F$$

ist als Differenz zweier meßbarer Funktionen ebenfalls meßbar.

10.5.3 Satz

Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und $c \in \mathbb{R}$, so ist

$$E = \{x\colon f(x) < c\}$$

meßbar. Dies gilt ebenso für $\leq$, $>$ und $\geq$.

Beweis: Setze

$$\varphi_k(x) = \min(1, k \cdot (c - f(x))^+).$$

φ_k ist meßbar.
Für $x \in E$ ist $k \cdot (c - f(x))^+ > 1$ für $k \geq k_0$, d. h. $\varphi_k(x) = 1 = \chi_E(x)$ für $k \geq k_0$. Für $x \notin E$ ist $k \cdot (c - f(x))^+ = 0$, d. h. $\varphi_k(x) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_k(x) \to 0 = \chi_E(x)$.
Da $\varphi_k \to \chi_E$ ist χ_E meßbar.
Aufgabe: Beweis für $\leq$.

10.5.4 Prinzip von Cavalierei

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und $m(E) < \infty$. Sei

$$E_x := \{y\colon (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^q.$$

Dann sind fast alle E_x meßbar in $\mathbb{R}^q$ mit

$$m_q(E_x) := \int \chi_{E_x}(y)\, dy < +\infty$$

und

$$m_n(E) = \int m_q(E_x)\, dx.$$

Umgekehrt: Ist $m_q(E_x) < +\infty$ fast überall, so gilt

$$m_n(E) = \int m_q(E_x)\, dx,$$

falls der rechte Term $< +\infty$ ist.

Beweis: Es ist

$$m_n(E) = \int \chi_E(x,y)\, d(x,y).$$

Mit Fubini gilt:

$$x \longmapsto \int \chi_E(x,y)\, dy < +\infty$$

fast überall und in $L(\mathbb{R}^p)$. Außerdem ist

$$m_n(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^p} \int \chi_{E_x}(y)\, dy\, dx.$$

Die Umkehrung entspricht dem Satz von Tonnelli, da $m_q > 0$ ist.

10.5.5 Definition: Integrierbarkeit über E

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $f\colon E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *integrierbar* über E, $f \in L(E)$, wenn ihre triviale Fortsetzung

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $L(\mathbb{R}^n)$ ist. Man setzt

$$\int_E f = \int_E f(x)\, dx := \int f_0.$$

10.5.6 Definition: Ordinatenmengen

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $F\colon E \to [0,\infty)$. Dann heißt

$$E(f) := \{(x,y)\colon x \in E,\ 0 \le y \le f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Ordinatenmenge. Analoges gilt für $<, \le; \le, <$ und $<, <$.
Analog seien auch $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \le g(x)$:

$$E(f,g) = \{(x,y)\colon x \in E, f(x) \le [<] y \le [<] g(x)\}.$$

10.5.7 Satz

Sind f und g meßbar, so ist auch $E(f,g)$ meßbar.
Ist $g - f \in L(E)$, so ist

$$m_{n+1}(E(f,g)) = \int E(g(x) - f(x))\, dx.$$

Beweis: Hier für $E(g) = E(0, g)$.
Zeige die Meßbarkeit. Dann wende Cavalieri an, da

$$(E(g))_x = \{y\colon 0 \leq y \leq g(x)\}$$
$$m_1((E(g))_x) = g(x).$$

Behauptung:

$$\chi_{E(g)}(x, y) = \chi_E(x) \cdot \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x, y)$$

mit

$$\varphi_k(x, y) = \min\left(1, k^2\left[\left(y + \frac{1}{k}\right)\left(g(x) + \frac{1}{k} - y\right)\right]^+\right).$$

Dabei ist $\varphi_k(x, y)$ meßbar.
Für $x \notin E$ ist $\chi_{E(g)}(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $x \in E$ gilt:
Wenn $y > g(x)$ ist, ist

$$g(x) + \frac{1}{k} - y < 0 \text{ für } k \geq k_0$$

und $y + \frac{1}{k} > 0$.
Damit ist $[\ldots]^+ = 0$ und $\varphi_k(x, y) = 0$.
Ist $y < 0$ dann ist genauso $\varphi_k(x, y) = 0$ für $k \geq k_0$.
Für $0 \leq y \leq g(x)$ und $(x, y) \in E(g)$ ist

$$y + \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$$

und

$$g(x) + \frac{1}{k} - y \geq \frac{1}{k}.$$

Damit ist $[\ldots]^+ \geq \frac{1}{k^2}$ und damit $\varphi_k(x, y) = 1$, $\chi_{E(g)} = 1$.
Zusammen folgt, daß $\chi_{E(g)}$ meßbar.
Aufgabe: Führe den Beweis für $\{(x, y)\colon 0 < y \leq g(x)\}$.

10.5.8 Folgerung

Ist $f \in R([a, b])$, dann ist $\operatorname{graph} f$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ (vergleiche mit 10.1.3, Punkt (f)).
Jetzt: Ist $f\colon E \to \mathbb{R}$ meßbar für meßbares $E \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist

$$\operatorname{graph} f = \{(x, f(x))\colon x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

eine $(n + 1)$-dimensionale Nullmenge.

$$\operatorname{graph} f = E(f, f)$$

ist meßbar mit dem Maß

$$\int\limits_E f(x) - f(x)\, dx = 0.$$

10.5.9 Bemerkung

zum Beispiel 10.4.8, Seite 282. Es ist

$$E = \left\{(x, y, z)\colon z > 1,\, x^2 + y^2 < \frac{1}{y^2}\right\}$$

$$F = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 1\}.$$

Es ist $f(x, y) = 1$ auf E und $g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ auf $E \setminus \{0\}$.
$E = F(f, g)$ ist meßbar, da f und g meßbar sind.
Dabei ist ∂E eine Nullmenge.

10.5.10 Beispiel: Maß der n-dimensionalen Kugel

Sei

$$K_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| \le r\}$$

die n-dimensionale r-Kugel. Dann ist

$$m(K_n(r)) = c_n \cdot r^n$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_{n+1} &= 2 \cdot c_n \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\, dt. \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} c_2 &= \pi \\ c_3 &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ohne Beweis gilt

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Beweis: Durch Induktion nach n:

$n = 1$: ✓

$n \mapsto n + 1$: Sei $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
Es ist

$$\begin{aligned} K_{n+1}(r) &= \{(x, y)\colon \|x\|^2 + y^2 \le r^2\} \\ &= \{(x, y)\colon \|x\| \le r,\, |y| \le \sqrt{r^2 - \|x\|^2}\} \end{aligned}$$

und

$$(K_{n+1}(r))_y = K_n(\sqrt{r^2 - y^2}).$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt dann

$$\begin{aligned}
m_{n+1}(K_{n+1}(r)) &= \int_{-r}^{r} m_n((K_{n+1}(r))_y)\,dy = \int_{-r}^{r} c_n \left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^n\,dy \\
&= 2c_n \int_0^r (r^2-y^2)^{n/2}\,dy = \left|\begin{matrix} y = r\sin t \\ dy = r\cos t\,dt \end{matrix}\right| \\
&= 2c_n \int_0^{\pi/2} r^n(\cos t)^n \cdot r \cdot \cos t\,dt = 2c_n r^{n+1} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt \\
&= c_{n+1} \cdot r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Zeige nun $c_n \to 0$ für $n \to \infty$:

$$c_{n+1} = c_n \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt$$

Dabei ist $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt \to 0$.
Für $n \geq n_0$ ist $c_{n+1} \leq \frac{2}{3} c_n$.

10.5.11 Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to [0,\infty)$. Setze den Rotationskörper

$$R = \{(x,y,z)\colon x \in I,\ y^2+z^2 \leq (f(x))^2\}.$$

Wenn $f^2 \in L(\mathbb{R})$ ist, dann ist

$$m_3(R) = \pi \int_I (f(x))^2\,dx.$$

Wende den Satz von Cavalieri auf $\mathbb{R}$ an: Betrachte R_x für $x \in I$:

$$\begin{gathered}
R_x = \{(x,y)\colon y^2+z^2 \leq (f(x))^2\} \\
m_2(R_x) = \pi(f(x))^2 \\
m_3(R) = \pi \int_I (f(x))^2\,dx
\end{gathered}$$

10.5.12 Satz

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, so sind auch $A \cup B$, A$\cap B$, $A \setminus B$ und insbesondere $\mathbb{R}^n \setminus B$ meßbar und es gilt

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\chi_{A\setminus B} &= \chi_A \cdot (1-\chi_B)\\ \chi_{A\cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B\\ \chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}\end{aligned}$$

sind allesamt meßbar.
Also ist

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$$
$$\int \chi_{A\cup B} + \int \chi_{A\cap B} = \int \chi_A + \int \chi_B.$$

Aufgabe: Zeige dies per Induktion auch für endlich viele $A_1, \ldots, A_m$.

10.5.13 Satz

Sind $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ und } D = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

so sind V und D meßbar, und es ist

$$m(V) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Speziell gilt:

(a) $m(V) = \lim\limits_{k\to\infty} m(A_k)$, falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$.

(b) $m(D) = \lim\limits_{k\to\infty} m(A_k)$, falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$.

(c) $m(V) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, falls $A_j \cap A_k = \emptyset$ oder Nullmenge für $i \neq k$ ist (σ-Additivität des Lebesguemaßes).

Beweis: $D_k = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ und $V_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ sind meßbar mit

$$\chi_{D_k} = \chi_{A_1} \ldots \chi_{A_k} \text{ und } \chi_{V_k} = \min(1, \chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_k}).$$

$\chi_D = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_{D_k}$ ($\searrow$) ist meßbar und
$\chi_V = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_{V_k}$ ($\nearrow$) ist meßbar.

$$\begin{aligned}m(V) = \int \chi_V &= \lim_{k\to\infty} \int \chi_{V_k} \text{ (Beppo-Levi, falls konvergent)}\\ &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\int \chi_{A_1} + \cdots + \int \chi_{A_k} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).\end{aligned}$$

(a) $V_k = A_k$: $m(V) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$

(b) $D_k = A_k$: $m(D) = \lim_{k\to\infty} m(D_k)$

(c) „$\leq$“: siehe oben ✓

„$\geq$“: Es ist $\chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_k}$ nur in einer Nullmenge, also ist fast überall

$$\chi_{V_k} = \chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_k}.$$

Damit ist

$$m(V_k) = \sum_{j=1}^{k} m(A_j)$$

und für $k \to \infty$ ist

$$m(V) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

10.5.14 Beispiel einer nicht meßbaren Menge in $\mathbb{R}$

Die Relation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$$

ist eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen $[x]$. Es ist entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$. Sei A Vertretersystem in $[0,1)$, d. h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $\xi \in A$ mit $\xi \in [x]$, sprich $\xi \sim x$ (Auswahlaxiom, äquivalent zum Lemma von Zorn, Wohlordnungssatz).
Die Menge A ist nicht meßbar.

Beweis: Setze

$$A + r := \{a + r\colon a \in A,\ r \in \mathbf{Q},\ 0 \leq r < 1\}$$

und

$$A_r := \{a + r\colon a \in A,\ a + r < 1\} \cup \{a + r - 1\colon a \in A,\ a + r \geq 1\}.$$

Zeige

(1) $A_r \cap A_s = \emptyset$ für $r \neq s$.

(2) $\bigcup\limits_{r\in[0,1)} A_r = [0,1)$.

Wenn dann nun A meßbar wäre, dann auch $A + r$ mit $m(A + r) = m(A)$.
Ebenso wäre $m(A_r) = m(A) = m(A_0)$. Damit ist

$$1 = m([0,1)) = \sum_{r\in[0,1)} m(A_r) = \sum_{r\in[0,1)} m(A) = 0.$$

Widerspruch! Also kann A nicht meßbar sein.

ad (1): Sei $x \in A_r \cap A_s$ mit $0 \leq r, s < 1$ und $r \neq s$.
Es existieren $a \in A$ und $b \in A$ mit

$$x = a + r \text{ oder } a + r - 1$$
$$x = b + s \text{ oder } b + s - 1.$$

Subtraktion liefert

$$a - b = s - r \in \mathbf{Q}.$$

Damit ist $a \sim b$.
Daraus folgt nach der Konstruktion von A, daß $a = b$ und damit $r = s$ sein muß. Dies ist ein WIDERSPRUCH! Also muß $A_r \cap A_s$ für $r \neq s$ eine leere Menge sein.

ad (2): **„$\subseteq$":**

$$\bigcup_{r \in [0,1)} A_r \subseteq [0,1)$$

ist klar, weil $A_r \subseteq [0,1)$ ist.

„$\supseteq$": Sei $x \in [0,1)$: $x \sim a$ für ein $a \in A$.
Damit ist $x - a = r \in \mathbf{Q}$ und $-1 < x - a < 1$, $x \in A + r$, $x \in A_r$.
Für $0 \leq r < 1$ gilt: $x \in A_r$.
Für $-1 < r < 0$ gilt: $x = a + r + 1 - 1 \in A_s = A_{r+1}$ mit $s = r + 1 \in (0,1)$, weil $a + s \geq 1$ ist.

10.5.15 Satz, absolute Stetigkeit des L-Integrals

Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es

(a) $f = g + h$ mit $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$, g beschränkt und $\int |h| < \varepsilon$.

(b) ein $\delta > 0$ mit

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

für jede meßbare Menge mit $m(E) < \delta$
(Absolute Stetigkeit des Lebesgue-Integrals).

Beweis:

1. Setze

$$f_k = \begin{cases} k & \text{wo } f > k \\ -k & \text{wo } f < -k \\ f & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $|f_k| \leq k$, $|f_k| \leq |f|$ und $f_k \to f$ überall für $k \to \infty$.
Nach dem Satz von Lebesgue gilt für $k \to \infty$

$$\int f_k \to \int f.$$

Es ist auch aus demselben Grund für $k \to \infty$

$$\int |f - f_k| \to 0,$$

denn es ist $|f - f_k| \leq 2|f|$.
Wähle k so, daß $\int |f - f_k| < \varepsilon$ ist.
$g = f_k$ ist beschränkt durch k. Setze $h = f - f_k$. Dann ist $\int |h| < \varepsilon$ und $f = g + h$.

2. Sei $f = g + h$ mit $|g| \leq M$ und $\int |h| < \varepsilon/2$ (geht nach Teil (a)) und $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$.
   $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sei meßbar und $m(E) < \delta$. Dann ist

$$\int_E |f| < \int_E |g| + \int_E |h|$$
$$\leq M \cdot m(E) + \int_{\mathbb{R}^n} |h| < M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

10.6 Die Transformationsformel

10.6.1 Motivation

Im Abschnitt 5.3.6 auf der Seite 110 wird gezeigt:
Für $f \in R([a,b])$, $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, bijektiv und stetig differenzierbar, gilt die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \cdot |\Phi'(t)\,dt.$$

Was gibt es für Möglichkeiten beim Lebesgue-Integral?

10.6.2 Die Transformationsformel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus (d. h. Φ ist bijektiv und Φ, Φ^{-1} sind stetig differenzierbar). Dann gilt

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\Phi(t)) \cdot |\det \Phi'(t)|\,dt,$$

wenn eine von beiden Seiten als Lebesgue-Integral existiert.

$$\left(\int_V g(\Phi^{-1}(x)) \cdot |\det(\Phi^{-1})'(x)|\,dx = \int_U g(t)\,dt\right)$$

Beweis: Später.

10.6.3 Satz (Spezialfall von 10.6.2)

Sei A eine $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi(x) := Ax + b$. Dann gilt:

$$m(\Phi(E)) = |\det A| \cdot m(E) \tag{10.1}$$

für jedes meßbare $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $m(E) < \infty$.

Beweis:

(1) Sei $\Phi(x) = x + b$ eine Verschiebung und E ein Intervall mit der zugehörigen charakteristischen Funktion χ_E. $\Phi(E)$ ist ebenfalls ein Intervall mit $m(\Phi(E)) = 1 \cdot m(E)$. Es ist $1 = |\det(\text{Einheitsmatrix})|$. (10.1) gilt für E =endl. Vereinigung von Intervallen.

$$(10.1) \iff \int \chi_{\Phi(E)}(x)\,dx = \int\limits_E \chi_E(x)\,dx$$

$$\chi_{\Phi(E)}(x) = \chi_E(x-b)$$

$$(10.1) \iff \int \chi_E(x-b)\,dx = \int \chi_E(x)$$

E =endl. Vereinigung von Intervallen.
Grenzübergang: Für jede meßbare Menge E mit $m(E) < \infty$.

$$[E \text{ meßbar} \iff \chi_E \text{ meßbar} \iff \exists \varphi_k \text{ TF}\colon \varphi_k \to \chi_E \text{ f.ü.}]$$

(2) Sei $\Phi(x) = Ax$:

(a) Sei $\det A = 0$. Dann ist $\Phi(E) \subseteq H$. H ist Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, also ist $m(\Phi(E)) \le m(H) = 0$ und $|\det A| \cdot m(E) = 0$.

(b) Sei

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

E sei Intervall mit den Kantenlängen $\ell_1, \dots, \ell_n$. Dann ist $\Phi(E)$ ein Intervall mit den Kantenlängen $|\lambda_1|\ell_1, \dots, |\lambda_n|\ell_n$.

$$m(\Phi(E)) = |\lambda_1 \dots \lambda_n| \cdot \ell_1 \dots \ell_n = |\det A| \cdot m(E)$$

$$\int\limits_{\Phi(E)} \chi_E(x)\,dx = \left(\int\limits_E \chi_E(x)\,dx \right) \cdot |\det A|$$

Wie unter (1) schließt man auf meßbare Mengen E mit $m(E) < \infty$.

(c) Sei nun $\Phi(x) = Ax$ mit $\det A \neq 0$.
Setze $W = [0,1]^n$ der Einheitswürfel und

$$\alpha(A) := m(\Phi(W)).$$

Zeige, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\alpha(A) = |\det A|.$$

Setze

$$\begin{aligned} E = a + [0,\ell]^n &= \{a + x\colon 0 \le x_\nu \le \ell \text{ für } \nu = 1, \dots, n\} \\ &= a + \Psi(W). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Psi(x) = \ell x$$

und damit

$$\begin{aligned} m(\Phi(E)) &\overset{(1)}{=} m(\Phi(\Psi(W))) = m(\Psi(\Phi(W))) \\ &\overset{(b)}{=} \underbrace{\ell^n}_{=m(E)} \cdot \underbrace{m(\Phi(W))}_{=\alpha(A)} = \alpha(A) \cdot m(E). \end{aligned}$$

Genauer gesagt, ist für Würfel $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m(\Phi(E)) = \alpha(A) \cdot m(E).$$

Dasselbe gilt für meßbares E (Zeige dies als Aufgabe. Schließe dabei von Würfeln auf Intervalle).
Wenn E offen ist, dann ist E die Vereinigung von sich nicht überlappenden Würfeln.
Die Beziehung $\alpha(A) = |\det A|$ ist richtig für

(i) $\det A = 0$. Dies wurde in (2a) gezeigt.

(ii) $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dies wurde in (2b) gezeigt.

(iii) orthogonales A ($A^T A = E_n$ = Eiheitsmatrix). Dies wird in (d) gezeigt.

(iv) beliebiges A mit $\det A \neq 0$. Dies wird in (e) gezeigt.

(d) Sei nun A orthogonal, d.h. es ist $A^T A = E_n$.
Setze $E = K(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$.
$A^T \cdot A = E_n \Rightarrow \Phi(E) = E$

$$m(\Phi(E)) = m(E) = \alpha(A) \cdot m(E)$$

$\Rightarrow \alpha(A) = 1$

$$1 = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$$

$\Rightarrow |\det A| = 1$.

(e) Sei nun A beliebig mit $\det A \neq 0$.
$A^T \cdot A$ ist symmetrisch und positiv definit, also ist $A^T \cdot A = S^T \cdot D \cdot S$ mit einer orthogonalen Matrix S und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, den Eigenwerten von $A^T \cdot A$ (Hauptachsentransformation für $A^T \cdot A$).
Setze

$$\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad \Delta^2 = D.$$

Dann ist

$$\Delta^{-1} \cdot D \cdot \Delta^{-1} = E_n$$

und

$$S \cdot A^T \cdot A \cdot S^T = S \cdot (S^T \cdot D \cdot S) \cdot S^T = D = \Delta \cdot \Delta.$$

Es ist

$$E_n = \Delta^{-1} \cdot D \cdot \Delta^{-1} = \underbrace{\Delta^{-1} \cdot S \cdot A^T}_{:=S_1} \cdot A \cdot S^T \cdot \Delta^{-1}$$

$$S_1 \cdot S_1^T = \Delta^{-1} \underbrace{S \cdot A^T \cdot A \cdot S^T}_{=D} \cdot \Delta^{-1} = E_n$$

Also ist S_1 orthogonal und

$$E_n = S_1 \cdot A \cdot S^T \cdot \Delta^{-1}$$

$$\underbrace{\alpha(E)}_{1} \overset{(\not\equiv)}{=} \underbrace{\alpha(S_1)}_{1} \cdot \alpha(A) \cdot \underbrace{\alpha(S^T)}_{1} \cdot \underbrace{\alpha(\Delta^{-1})}_{|\det(\Delta^{-1})|}$$

$$\Rightarrow \alpha(A) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_1}}} = \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}.$$

Es ist

$$|\det A| = \sqrt{\det(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$$

Also ist $\alpha(A) = |\det a|$.

Nachtrag zu $(\not\equiv)$:
Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Dann ist

$$\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B).$$

Beweis: $\alpha(AB)$, $\Phi(x) = Ax$, $\Psi(x) = Bx$.
$m(\Phi(E)) = \alpha(A) \cdot m(E)$:

$$\alpha(AB) \cdot m(E) = m(\Phi(\Psi(E))) = \alpha(A) \cdot m(Psi(E)) = \alpha(A) \cdot \alpha(B) \cdot m(E).$$

Also ist $\alpha(AB) = \alpha(A) \cdot \alpha(B)$.

Bis hierhin ist bewiesen, daß für $\Phi(x) = Ax + b$ gilt: $m(\Phi(E)) = |\det A| \cdot m(E)$.

10.6.4 Hilfssatz 1

Sei $\Phi \in C^1(K(0,\varrho), \mathbb{R}^n)$ und W_k Folge von Würfeln mit $0 \in W_k$ und $\operatorname{diam} W_k \to 0$. Dabei ist $\operatorname{diam} E = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\}$ der Durchmesser von E. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Für $k \to \infty$ ist

$$\frac{1}{m(W_k)} \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)| \to |\det \Phi'(0)|.$$

(b) Für $k \to \infty$ ist

$$\frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \to |\det \Phi'(0)|.$$

Beweis:

(a) Als Aufgabe. Sogar für stetige f gilt

$$\frac{1}{m(W_k)} \int\limits_{W_k} f(x)\,dx \to f(0).$$

(b) (i) Sei zuerst $\Phi'(0) = E_n$ die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^n$, d.h. es ist $\Phi(x) = x + r(x) \cdot \|x\|$ mit $r(x) \to 0$ für $x \to 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dazu existiert ein $\delta > 0$ mit $\|r(x)\| < \varepsilon$ für $\|x\| < \delta$.
Für $k \geq k_0$ gilt: $W_k \subseteq K(0, \delta)$.
Sei nun $y = \Phi(x)$ mit $x \in W_k$. Dann ist

$$y_\nu = x_\nu + \underbrace{\|x\|}_{\leq \sqrt{n} \cdot \ell_k} \cdot \underbrace{r_\nu(x)}_{|.| < \varepsilon}$$

Für W_k gilt dann

$$\Phi(W_k) \subseteq [-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)}, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)} + \ell_k] \\ \times \cdots \times [-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)}, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)} + \ell_k] \quad (10.2)$$

und

$$\Phi(W_k) \supseteq [+\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)}, -\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)} + \ell_k] \\ \times \cdots \times [+\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)}, -\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)} + \ell_k] \quad (10.3)$$

Also

$$\ell_k^n \cdot (1 - 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n \leq m(\Phi(W_k)) \leq \ell_k^n \cdot (1 + 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n$$
$$\underbrace{(1 - 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n - 1}_{> -\text{const} \cdot \varepsilon} \leq \frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} - 1 \leq \underbrace{(1 + 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n - 1}_{< \text{const} \cdot \varepsilon}$$

für $k \geq k_0$.

$$\Rightarrow \frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \to 1 = |\det \Phi'(0)|$$

für $k \to \infty$.

(ii) Allgemeiner Fall. Sei $\Phi'(0) = A$. Zuerst sei $\det A \neq 0$.
Sei $\Phi(x) = A^{-1} \cdot \Phi(x)$. Damit ist $\Phi'(0) = E_n$.

$$= \frac{m(A\Psi(W_k))}{m(W_k)}$$
$$\overset{\odot}{=} |\det A| \cdot \frac{m(\Psi(W_k))}{m(W_k)}$$
$$\overset{\otimes}{\to} |\det A| \cdot 1$$

($\odot$: Satz; $\otimes$: Spezialfall).
Sei nun $\Phi'(0) = A$ mit $\det A = 0$. Dann ist

$$\Phi(x) = Ax + \|x\| \cdot r(x) = Ax + f(x).$$

Es ist $\Phi(W_k) \subseteq H + f(W_k)$ mit einer Hyperebene H und $m(H) = 0$.
Für f gilt dabei:

$$f(W_k) = \left[-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \max_{x \in W_k} \|r(x)\|, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \max_{x \in W_k} \|r(x)\| \right]^n$$

mit

$$m(f(W_k)) = (2\sqrt{n} \cdot \ell_k)^n \cdot \varepsilon^n.$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{m(f(W_k))}{m(W_k)} \leq (2\varepsilon\sqrt{n})^n$$
$$\frac{m(f(W_k))}{m(W_k)} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

10.6.5 Hilfssatz 2

(Satz über die Nullmengentreue)
Sei $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, U offen und $N \subseteq U$ eine Nullmenge. Dann ist $\Phi(N)$ eine Nullmenge.

Beweis: Sei $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_k$ mit kompakten Würfeln $W_k \subseteq U$.
Dann ist Φ auf W_k Lipschitzstetig, d. h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L_k \cdot \|x - y\|.$$

Sei nun $N_k = N \cap W_k$. Zeige, daß $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge ist. Dann ist auch

$$\Phi(N) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(N_k)$$

eine Nullmenge.
Nachweis, daß $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge ist:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Dann existieren Würfel I_ν mit $N_k \subseteq \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu) < \varepsilon$.
Also hat $\Phi(I_\nu)$ höchstens den L_k-fachen Durchmesser von I_ν,
d. h. es existiert ein Würfel $J_\nu \supseteq \Phi(I_\nu)$ mit höchstens L_k-facher Kantenlänge von I_ν.

$$\Rightarrow m(J_\nu) \leq (L_k)^n \cdot m(I_\nu)$$
$$\Rightarrow \Phi(N_k) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Phi(I_\nu) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} J_\nu$$

und damit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m(J_\nu) \leq (L_k)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu) \leq (L_k)^n \cdot \varepsilon$$

Also ist $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge.

10.6.6 Hilfssatz 3

Sei $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und Φ injektiv. Insbesondere sei $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.
Dann gilt für jeden Würfel $W \subseteq U$:

$$m(\Phi(W)) = \int\limits_W |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Beweis: Setze $W_0 = W$ und definiere $\alpha \in \mathbb{R}$ durch

$$m(\Phi(W)) = \alpha \cdot \int_W |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Zu zeigen ist nun: $\alpha = 1$.
Zerlege W_0 in 2^n kompakte, gleich große Würfel I_ν mit halber Kantenlänge.
Klar ist:

$$m(W_0) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(I_\nu).$$

Es gilt dann:

$$m(\Phi(W_0)) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi(I_\nu)),$$

denn es ist

$$W_0 = \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} (I_\nu)^0\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \partial I_\nu\right)}_{\text{Nullmenge}}.$$

Damit ist (weil Φ injektiv ist)

$$\Phi(W_0) = \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \Phi(I_\nu)^0\right) \cup \underbrace{\left(\Phi\left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \partial I_\nu\right)\right)}_{\text{Nullmenge nach HS 2}}.$$

Daraus folgt

$$m(\Phi(W_0)) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi((I_\nu)^0)) + 0 = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi(I_\nu)).$$

Andererseits gilt ebenso

$$m(\Phi(W_0)) = \alpha \int_{W_0} |\det \Phi'(x)|\, dx = \sum_{\nu=1}^{2^n} \alpha \cdot \int_{I_\nu} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Also existiert ein ν_0 mit

$$m(\Phi(I_{\nu_0})) \geq \alpha \cdot \int_{I_{\nu_0}} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Setze $W_1 = I_{\nu_0}$. Genauso erhält man induktiv eine Folge von Würfeln W_k mit $W_k \subseteq W_{k-1}$, in der W_k die halbe Kantenlänge von W_{k-1} hat und für die gilt:

$$m(\Phi(W_k)) \geq \alpha \cdot \int_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Daraus folgt, daß es ein $\xi \in U$ gibt mit

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} W_k = \{\xi\}.$$

Teile nun die Ungleichung durch $m(W_k)$:

$$\frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \geq \frac{1}{m(W_k)} \cdot \alpha \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Wende auf die linke Seite den Teil (a) und auf die rechte Seite Teil (b) vom Hilfssatz 1 an. Dann ist für $k \to \infty$:

$$|\det \Phi'(\xi)| \geq \alpha \cdot |\det \Phi'(\xi)|.$$

Also ist $\alpha \leq 1$. Zeige auf die gleiche Weise nun, daß $\alpha \geq 1$ ist. Damit ist dann die Behauptung bewiesen.

10.6.7 Hilfssatz 4

Sei $\Phi\colon U \to V$ eine Diffeomorphismus, d. h. $\Phi \in C^1(U,V)$, Φ ist bijektiv und $\Phi^{-1} \in C^1(U,V)$. Dabei seien U und V offene Mengen. Dann gilt:

$$m(V) = \int\limits_U |\det \Phi'(x)|\, dx,$$

falls eine der Seiten endlich ist.

Beweis: Seien W_k kompakte Würfel mit

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k.$$

Dabei sei $W_k \cap W_j$ für $k \neq j$ eine Nullmenge. Dann gilt nach dem Hilfssatz 3

$$m(\Phi(W_k)) = \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx$$

und dann

$$m(V) \overset{\text{HS2}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m(\Phi(W_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx \overset{\oplus}{=} \int\limits_U |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Dabei gilt $\oplus$ wegen Beppo-Levi für Reihen mit

$$f_k(x) = \begin{cases} |\det \Phi'(x)| & \text{für } x \in W_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

10.6.8 Beweis der Transformationsformel

Wiederholung der Transformationsformel:
Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi(U,V)$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\int\limits_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx = \int\limits_V f(y)\, dy,$$

falls eines der Integrale existiert.
Oder

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Beweis: Sei $f = \varphi$ eine Treppenfunktion, $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$, etwa:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_j & \text{im Würfel } I_j^0 \subseteq V \text{ für } j = 1, \dots, p \\ 0 & \text{außerhalb aller } \bar{I}_j \end{cases}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(y)\, dy &= \sum_{j=1}^p \int_{I_j} \varphi(y)\, dy = \sum_{j=1}^p c_j \cdot m((I_j)^0) \\ &\overset{\text{HS4}}{=} \sum_{j=1}^p c_j \int_{U_j} |\det \Phi'(x)|\, dx \end{aligned}$$

mit $U_j = \Phi^{-1}((I_j)^0)$ ist hierfür

$$= \sum_{j=1}^p \int_{U_j} \varphi(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx = \int_U \varphi(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx,$$

d. h. die Transformationsformel gilt für alle Treppenfunktionen $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$. Also gilt die Transformationsformel für $f \in L^+(V)$, denn $\varphi_k \nearrow f$ mit $\int \varphi_k \to \int f$:

$$\begin{aligned} \int_V f(y)\, dy &= \lim_{k\to\infty} \int_V \varphi_k(y)\, dy = \lim_{k\to\infty} \int_U \underbrace{\varphi_k(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|}_{\nearrow f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|}\, dx \\ &\overset{\text{B-L}}{=} \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Also gilt die Transformationsformel auch für $f \in L(V)$. Zeige nun noch: Auch aus der Existenz von

$$\int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx$$

folgt die Formel.
Setze $\Psi(y) = \Phi^{-1}(y)$, Ψ Diffeomorphismus und $g(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$.
Nach Voraussetzung existiert $\int_U g(x)\, dx$.

$$\begin{aligned} \int_U g(x)\, dx &= \int_V g(\Psi(y)) \cdot |\det \Phi'(y)|\, dy \\ &= \int_V f(y) \cdot \underbrace{|\det \Psi'(y)| \cdot |\det(\Phi'(\Psi(y)))|}_{=1}\, dy = \int_V f(y)\, dy. \end{aligned}$$

10.6.9 Spezielle Transformationen

(a) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: Setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ r^2 &= x^2+y^2 \\ \Phi(r,\theta) &= \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\colon x\geq 0\}$. Es ist

$$\det\Phi' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Für $f\in L(\mathbb{R}^2)$ gilt dann:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_P f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,d(r,\theta) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,d\theta\,dr.$$

(b) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\lambda\cdot\cos\beta \\ y &= r\sin\lambda\cdot\cos\beta \\ z &= r\sin\beta. \end{aligned}$$

Dabei ist λ die geographische Länge, β die Breite und $r^2=x^2+y^2+z^2$ der quadrierte, zum Punkt (x,y,z) gehörige Radius.
Es ist $0\leq\lambda\leq 2\pi$ (oder $-\pi\leq\lambda\leq\pi$ und $-\pi/2\leq\beta\leq\pi/2$.
Herleitung: Setze $z=r\sin\beta$ mit $-\pi/2\leq\beta\leq\pi/2$

$$x^2+y^2 = r^2-r^2\sin^2\beta = (r\cos\beta)^2$$

Polarkoordinaten für (x,y):

$$\begin{aligned} x &= (r\cos\beta)\cos\lambda \\ y &= (r\cos\beta)\sin\lambda. \end{aligned}$$

Also:

$$\Phi(r,\lambda,\beta) = \begin{pmatrix} r\cos\lambda\cos\beta \\ r\sin\lambda\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

mit $0<r<\infty$, $0<\lambda<2\pi$ $[-\pi<\lambda<\pi]$ und $-\pi/2<\beta<\pi/2$.

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}^3\setminus N$$

ist Diffeomorphismus mit einer Nullmenge

$$N=\{(r\cos\beta,0,r\sin\beta)\colon r\geq 0, -\pi/2\leq\beta\leq\pi/2\} = \{(x,0,z)\colon (x,z)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0\}$$

und

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\lambda\cos\beta & -r\sin\lambda\cos\beta & -r\cos\lambda\sin\beta \\ \sin\lambda\cos\beta & r\cos\lambda\cos\beta & -r\sin\lambda\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{vmatrix} = r^2\cos\beta > 0.$$

Zusammen ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi(r,\lambda,\beta)) \cdot r^2 \cdot \cos\beta\, d\beta\, d\lambda\, dr.$$

(c) Zylinderkoordinaten: Setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\Phi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

(d) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$:
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = r$.

$$x = \Phi_n(r, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$$

z. B.

$$\Phi_2(r,\theta_0) = r\begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_3(r,\theta_0,\theta_1) = r\begin{pmatrix} \cos\theta_0\cos\theta_1 \\ \sin\theta_0\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_n(r,\theta_0,\ldots,\theta_{n-2}) = r\begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \ddots \qquad \vdots \\ \sin\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\det \Phi_n' = r^{n-1}(\cos\theta_1)(\cos\theta_2)^2(\cos\theta_3)^3 \ldots (\cos\theta_{n-2})^{n-2}$$

unter den Bedingungen $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \theta_j \leq \pi/2$ für $j = 1, \ldots, n-2$.
Herleitung: Setze $x_n = r\sin\theta_{n-2}$ für $-\pi/2 \leq \theta_{n-2} \leq \pi/2$.
$\|x\| = r$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\|\bar{x}\|^2_{R^{n-1}} = r^2 - r^2\sin^2\theta_{n-2} = (r\cos\theta_{n-2})^2$$

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix} = \Phi_n(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2})$$

$$\theta_4 = \begin{pmatrix} r\cos\theta_2\cos\theta_0\cos\theta_1 \\ r\cos\theta_2\sin\theta_0\cos\theta_1 \\ r\cos\theta_2\sin\theta_1 \\ r\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für $n-1 \mapsto n$:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} r\cos\theta_{n-2}(\cos\theta_0 \dots \cos\theta_{n-3}) \\ r\cos\theta_{n-2}(\sin\theta_0 \dots \cos\theta_{n-3}) \\ \vdots \\ r\cos\theta_{n-2}(\sin\theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

Schreibe $\Phi_n = \Phi \circ \Psi$:

$$\Phi(\varrho, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(\varrho, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}) \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Psi(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} r\cos\theta_{n-2} \\ \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi \circ \Psi(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\det \Phi_n' = \det(\Phi' \circ \Psi) \cdot \Psi'$$

mit

$$\det \Phi' \circ \Psi = \begin{vmatrix} \Phi_{n-1}' \circ \Psi & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \Phi_{n-1}'(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}$$

$$\det \Psi' = \begin{vmatrix} \cos\theta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r\sin\theta_{n-2} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \sin\theta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & r\cos\theta_{n-2} \end{vmatrix} = r \text{ (als Aufgabe)}$$

Rekursionsformel für die Determinante:

$$\underbrace{\det \Phi_n'}_{\triangle_n}(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2}) = r \cdot \underbrace{\det \Phi_{n-1}'}_{\triangle_{n-1}}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3})$$

$\triangle_2 = r$, $\triangle_3 = r\cos\theta_1$
$\triangle_{n-1} = r^{n-2}\cos\theta_1(\cos\theta_2)^2 \dots (\cos\theta_{n-3})^{n-3}$
$\triangle_n = r \cdot (r\cos\theta_{n-2})^{n-2}\cos\theta_1(\cos\theta_2)^2 \dots (\cos\theta_{n-3})^{n-3}$.

10.6.10 Beispiele

(a) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: Berechnung von

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beweis: Sei $Q = \{(x,y)\colon x,y > 0\}$. Dann ist

$$\int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = I^2.$$

Mit Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) &= \int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\cdot r\,d\theta\,dr\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-r^2}\cdot(-2r)\,dr = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(b) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Aufgabe: Berechne $m(K(0,r)) = ?$

(c) Zylinderkoordinaten:
Berechne den Inhalt von

$$E = \left\{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le \frac{1}{1+z^2}\right\}.$$

Es ist $z \in \mathbb{R}$ und $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

$$\begin{aligned}m(E) &= \int_{-\infty}^\infty\int_0^{(1+z^2)^{-1/2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dz = 2\pi\int_{-\infty}^\infty \frac{r^2}{2}\Big|_0^{(1+z^2)^{-1/2}}\,dz\\ &= \pi\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \pi\arctan z\Big|_{-\infty}^\infty = \pi^2.\end{aligned}$$

(d) Allgemeine Kugelkoordinaten: Aufgabe: Berechne $m(K(0,r)) = ?$

10.7 Parameterintegrale

10.7.1 Feste Bezeichnungen

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist meßbar und $\neq \emptyset$.
$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$.
$f\colon D\times E \to \mathbb{R}$. Für $f(x,y)$ ist $x \in D$ und $y \in E$.

f ist bezüglich y integrierbar über E.
$g\colon E \to [0,\infty)$ ist integrierbar.

$$F(x) := \int_E f(x,y)\,dy$$

$F\colon D \to \mathbb{R}$ heißt Parameterintegral mit dem Parameter x.
Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

10.7.2 Satz über die Stetigkeit

Sei $|f(x,y)| \le g(y)$ für alle $(x,y) \in D \times E$, und sei $x \mapsto f(x,y)$ stetig in $x = a \in D$ für fast alle $y \in E$.
Dann ist F stetig in $x = a$:

$$\lim_{x\to a} \int_E f(x,y)\,dy = \int_E \underbrace{(\lim_{x\to a} f(x,y))}_{=:f(a,y)}\,dy$$

Beweis: $(x^{(k)})$ sei Folge in D mit $x^{(k)} \to a$.

$$f_k(y) := |f(x^{(k)},y) - f(a,y)| \to 0 \text{ für } k \to \infty \text{ fast überall in } E$$

$0 \le f_k(y) \le 2g(y)$.
Mit dem Satz von Lebesgue gilt:

$$\int_E f_k(y)\,dy \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

$$\begin{aligned} |F(x^{(k)}) - F(a)| &= \left| \int_E f(x^{(k)},y) - f(a,y)\,dy \right| \\ &\le \int_E |f(x^{(k)},y) - f(a,y)|\,dy \to 0 \text{ für } k \to \infty. \end{aligned}$$

10.7.3 Differenzierbarkeit von Parameterintegralen

Sei $f\colon D \times E \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ und

$$F(x) = \int_E f(x,y)\,dy.$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \mapsto f(x,y)$ diffbar in $x = a$ für fast alle y und gilt

$$|f(x,y) - f(a,y)| \le \|x-a\| g(y) \text{ (mit } g \in L),$$

so ist F differenzierbar in $x = a$ und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(a) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)\,dy.$$

Beweis:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^\nu, y) - f(a,y)}{t}$$

(ex. nach Vor. für fast alle y)

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{f(a+\frac{1}{k}e^\nu, y) - f(a,y)}{\frac{1}{k}}}_{\text{meßbar bzgl. } y} = \text{meßbar}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)\right| \le g(y) \text{ für } \nu = 1,\dots,n$$

also integrierbar.
Seo $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta$, δ so, daß $\{x\colon \|x-a\| < \delta\} \subseteq D$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|h\|}&\left|F(a+h) - F(a) - \sum_{\nu=1}^n h_\nu \cdot \int_E \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(a,y)\,dy\right| \\ &\le \frac{1}{\|h\|}\int_E \left|f(a+h,y) - f(a,y) - \sum_{\nu=1}^n h_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)\right| dy \\ &\overset{?}{\to} 0 \text{ für } h \to 0\end{aligned}$$

Setze

$$\Phi(h,y) := \frac{1}{\|h\|}\left|\underbrace{f(a+h,y) - f(a,y)}_{\le g(y)\cdot\|h\|} - \underbrace{\sum_{\nu=1}^n h_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)}_{\le\|h\|\cdot n\cdot g(y)}\right|$$

ist stetig für $0 < \|h\| < \delta$ für fast alle y.
Es ist $\Phi(0,y) := 0$.
Wenn $h \mapsto \Phi(h,y)$ stetig ist in $K(0,\delta)$ für fast alle y, dann gilt nach dem Stetigkeitssatz mit $|\Phi(h,y)| \le g(y) + n\cdot g(y) = (n+1)g(y)$ das obige $\overset{?}{\to}$.
Weise nun die Stetigkeit im Punkt $h = 0$ (für fast alle y) nach:
Für welche y gilt $\Phi(h,y) \to 0$, wenn $h \to 0$ ist?
Genau für alle y, in denen $f(x,y)$ bzgl. x differenzierbar ist im Punkt $x = a$.

10.7.4 Beispiel

Die Gamma-Funktion ist für $x > 0$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Die Beta-Funktion ist für $x > 0$ und $y > 0$ definiert durch

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

(a) Γ ist stetig.

(b) Γ ist stetig differenzierbar ($\Gamma \in C^\infty(0,\infty)$).

(c) Es ist

$$\Gamma^{(k)} = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^k \, dt.$$

Beweis:

zu (a): $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ ist stetig für alle $t > 0$.
Sei $a \in D = [\alpha, \beta] \subseteq (0, \infty) = E$. Dann ist

$$e^{-t} t^{x-1} \leq \left\{ \begin{array}{r} t^{\alpha-1} \text{ für } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t^{\beta-1} \text{ für } t > 1 \end{array} \right\} =: g(t)$$

g ist Majorante. $\Rightarrow$ Stetigkeitssatz anwenden.

zu (b): Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1} \log t.$$

Sei $a > 0$, $0 < \alpha < a < \beta < \infty$ und $D = (\alpha, \beta)$. Dann ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-t} t^{x-1} \right| \leq |\log t| \cdot g(t)$$

integrierbar (Aufgabe).
Satz über die Differenzierbarkeit anwendwar, da

$$|e^{-t} t^{x-1} - e^{-t} t^{a-1}| \overset{\text{MWS}}{=} |x - a| \cdot |e^{-t} t^{\xi-1} \log t|$$

(wobei ξ zwischen a und x ist)

$$\leq |x - a| \cdot \underbrace{|\log t| \cdot g(t)}_{\text{Majorante}}.$$

zu (c): Ohne Beweis.

10.7.5 Beispiel: Das Newton-Potential

Für dieses Beispiel ist $n \geq 3$.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\varrho \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbare, beschränkte Massendichte und

$$u(x) = \int\limits_K \frac{\varrho(\xi)}{\|x - \xi\|^{n-2}} \, d\xi$$

.

Behauptung:

- $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$

Zeige:

(a) $u \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet mit $\bar{D} \cap K = \emptyset$

(b) u ist stetig in $a \in K$

(c) Das Newton-Potential ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus K$, d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_{x_\nu x_\nu} = 0,$$

kurz:

$$\triangle u = 0$$

mit dem *Laplace-Operator*

$$\triangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}.$$

Beweis:

zu (a): Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus K$, D eine Umgebung um a mit $\bar{D} \cap K = \emptyset$.
Für $x \in D$ gilt:

$$\|x - \xi\| \geq d > 0 \text{ für alle } \xi \in K,\ x \in D.$$

Außerdem ist

$$|\varrho(\xi) \leq M.$$

$\mathbf{C^0}$:

$$x \longmapsto \frac{\varrho(\xi)}{\|x - \xi\|^{n-2}}$$

ist stetig in D für alle $\xi \in K$. Eine Majorante in K ist

$$g(\xi) = \frac{M}{d^{n-2}}.$$

Also ist $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$.
$\mathbf{C^1}$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\varrho(\xi)}{\|x - \xi\|^{n-2}} \right| = \left| \varrho(\xi)(-n+2)\|x - \xi\|^{-n+1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \|x - \xi\| \right|$$

mit $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\|x\| = \frac{x_\nu}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} &= \left| (-n+2) \cdot \varrho(\xi) \cdot \|x - \xi\|^{-n+1} \cdot \frac{x_\nu - \xi_\nu}{\|x - \xi\|} \right| \\ &\leq (n-2)M \cdot \|x - \xi\|^{-n+1} \\ &\leq (n-2)M d^{-n+1} \end{aligned}$$

mit $\xi \in K, x \in D$.
$\mathbf{C}^2$:
Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}}\right) = -(+n-2)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{x_\nu - \xi_\nu}{\|x-\xi\|^n}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{x_\nu-\xi_\nu}{\|x-\xi\|^n}\right) = \begin{cases} (x_\nu-\xi_\nu)\cdot(-n)\|x-\xi\|^{-n-1}\cdot\frac{x_\mu-\xi_\mu}{\|x-\xi\|} & \mu \neq \nu \\ (x_\nu-\xi_\nu)^2\cdot(-n)\|x-\xi\|^{-n-2}+\frac{1}{\|x-\xi\|^n} & \mu = \nu \end{cases}$$

ist dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu x_\nu}\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}} = \frac{-n(x_\nu-\xi_\nu)(x_\mu-\xi_\mu)}{\|x-\xi\|^{n+2}}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}} = \frac{-n(x_\nu-\xi_\nu)^2}{\|x-\xi\|^{n+2}} + \frac{1}{\|x+\xi\|^n}$$

$\Rightarrow$ Majoranten klar: immer von der Form $\frac{\text{const}}{d^n}$ für C^n.

zu (b): Stetigkeit in $x = a \in K$: Sei $a \in K$, $U = K(a,\delta)$, δ fest: Es ist

$$u(x) = \underbrace{\int\limits_{K\setminus U}\frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\,d\xi}_{w(x)} + \underbrace{\int\limits_{K\cap U}\frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\,d\xi}_{v(x)}.$$

$w(x)$ ist stetig in U, wie schon gezeigt.
Sei $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $sigma < \delta/2$, so daß $K(a,\sigma) \subseteq K$ ist.
Sei $\|x-a\| < \sigma$:

$$\begin{aligned} |v(x)-v(a)| &= \left|\int\limits_{K\cap U}\frac{\varrho(x)}{\|x-\xi\|^{n-2}} - \frac{\varrho(\xi)}{\|a-\xi\|^{n-2}}\,d\xi\right| \\ &\leq \int\limits_{K\cap U}\left|\frac{\varrho(x)}{\|x-\xi\|^{n-2}} - \frac{\varrho(\xi)}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right|\,d\xi \\ &\leq M\left(\int\limits_{K\cap U}\frac{d\xi}{\|x-\xi\|^{n-2}} + \int\limits_{K\cap U}\frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right) \\ &\leq M\left(\int\limits_{U}\frac{d\xi}{\|x-\xi\|^{n-2}} + \int\limits_{U}\frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right) \end{aligned}$$

Berechne das 2. Integral:

$$\begin{aligned} \int\limits_U\frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}} &= \left|\begin{array}{c}\text{Subst.:}\\ \xi = a+\delta\cdot y \\ d\xi = \delta^n\cdot dy\end{array}\right| \\ &= \delta^n\int\limits_{K(0,1)}\frac{dy}{\delta^{n-2}\|y\|^{n-2}} \\ &= \delta^2\int\limits_{K(0,1)}\frac{dy}{\|y\|^{n-2}} \end{aligned}$$

Berechne nun das 1. Integral mit Substitution $\xi = x + \delta \cdot y$:

$$\delta^2 \int\limits_{K(0,3/2)} \frac{dy}{\|y\|^{n-2}} = \text{const} \cdot \delta^2$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, daß $\text{const} \cdot \delta^2 < \varepsilon/2$ ist:

$$\begin{aligned} u(x) - u(a) &= v(x) - v(a) + w(x) - w(a) \\ |v(x) - v(a)| &< \varepsilon/2 \text{ für } \|x - a\| < \delta/2 \\ |w(x) - w(a)| &< \varepsilon/2 \text{ für } \|x - a\| < \sigma < \delta/2 \\ \Rightarrow |u(x) - u(a)| &< \varepsilon \text{ für } \|x - a\| < \delta. \end{aligned}$$

zu (c):

$$\triangle u = \int\limits_E \varrho(\xi) \underbrace{\left(\triangle \frac{1}{\|x - \xi\|^{n-2}} \right)}_{=0 \text{ für alle } \xi} d\xi = 0,$$

denn es ist

$$\triangle \frac{1}{\|x - \xi\|^{n-2}} = \frac{n}{\|x - \xi\|^n} - \frac{n}{\|x - \xi\|^{n-2}} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2 = 0.$$

10.8 Das eindimensionale Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt ist immer $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, dx =: \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Zur Wiederholung: Wenn $f' \in R([a,b])$ ist, dann gilt

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

10.8.1 Satz

Ist f monoton wachsend (fallend), so ist f fast überall differenzierbar und für das Lebesgueintegral gilt:

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx \leq f(b) - f(a)$$

(beziehungsweise $\geq$).

Beweis: Später in 10.8.3.

10.8.2 Hilfssatz (Sunrise-Lemma)

(nach Riesz) Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$E = \{x \in (a,b)\colon \text{ es ex. } \xi > x \text{ mit } g(\xi) > g(x)\}.$$

Behauptung: E ist offen, also $E = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$ oder $= \emptyset$ und $g(a_k) = g(b_k)$, außer, wenn $a_k = a$ ist. Dort gilt nur: $g(a_k) \leq g(b_k)$.

Beweis: Sei $x \in E$ und dazu $\xi > x$ mit $g(\xi) > g(x)$. Es existiert ein $\delta > 0$ mit: Ist $|x' - x| < \delta$, so gilt: $x' < \xi$ und $g(x') < g(\xi)$ (wegen der Stetigkeit).
Also ist $(x - \delta, x + \delta) \cap (a,b) \subseteq E$, E ist offen. Damit ist $E = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$.
Zeige noch, daß $g(a_k) = g(b_k)$ ist:

1. Sei $a_k > 0$. Dann ist $g(a_k) \geq g(b_k)$, sonst wäre nämlich $a_k \in E$
   (sonst: $g(a_k) < g(b_k)$ für $a_k < b_k \Rightarrow a_k \in E$).
2. Sei $x \in (a_k, b_k)$ und x' definiert durch:

   $$g(x') = \max\{g(t)\colon x \leq t \leq b_k\}.$$

   Wen $x' < b_k$ ist, existiert ein $\xi > b_k$ mit $g(\xi) > g(x')$, weil $x' \in E$ und $g(x')$ maximal ist. Damit wäre dann $g(\xi) > g(x') \geq g(b_k)$ und damit $b_k \in E$. Widerspruch! Also ist $g(x) \leq g(x') = g(b_k)$. Für $x \to a_k$ gilt dann:

   $$g(a_k) \leq g(b_k).$$

Zusammen ist also $g(a_k) = g(b_k)$.

10.8.3 Beweis zu 10.8.1

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

Behauptung 1: f ist fast überall in $[a,b]$ differenzierbar.

Beweis: Sei $x \in (a,b)$. Setze

$$\Lambda_r = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lambda_r = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dies ist die **r**echtsseitige obere, bzw. untere Ableitung.
Definiere analog (mit $h \to 0-$) die **l**inksseitige obere/untere Ableitung Λ_ℓ und λ_ℓ. $f'(x)$ existiert nun genau dann, wenn $\lambda_\ell = \Lambda_\ell = \lambda_r = \Lambda_r < \infty$ ist.
Da f monoton wachsend ist, sind $\lambda_\ell, \ldots, \Lambda_r \geq 0$. Zeige noch in 3 Schritten:

1.) $\Lambda_r < +\infty$ fast überall.

2.) $\Lambda_r < \lambda_\ell$ fast überall.

3.) $\Lambda_\ell \leq \lambda_r$ fast überall.

Zusammen folgt dann:

$$\Lambda_\ell \leq \lambda_r \leq \Lambda_r \leq \lambda_\ell \leq \lambda_l < \infty \text{ fast überall,}$$

d. h. f ist fast überall differenzierbar.

1.) Es ist

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r = +\infty\} \subseteq \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > n\} = E_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $x \in E_n$. Dann existiert ein $\xi = x + h > x$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > n,$$

d. h.

$$\underbrace{f(\xi) - n \cdot \xi}_{=:g(\xi)} > \underbrace{f(x) - n \cdot x}_{=:g(x)}.$$

Mit dem Sunrise-Lemma folgt damit: $E_n \bigcup (a_k, b_k)$ mit $g(a_k) \leq g(b_k)$. Daraus folgt:

$$f(a_k) - f(b_k) \leq n(a_k - b_k)$$
$$(b_k - a_k) \leq \frac{1}{n}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Summiere auf:

$$\begin{aligned}\sum_k (b_k - a_k) &\leq \frac{1}{n} \sum_k f(b_k) - f(a_k)\\ &\leq \frac{1}{n}(f(b) - f(a))\\ &< \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.\end{aligned}$$

Damit ist $m(E_\infty) \leq m(E_n) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, also ist $m(E_\infty) = 0$ und damit $\Lambda_r < +\infty$ fast überall.

2.) Setze

$$E_{c,d} = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > d > c > \lambda_\ell\}$$

und

$$E = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > \lambda_\ell\} = \bigcup_{0 \leq c < d \text{ rational}} E_{c,d}.$$

E ist eine abzählbare Vereinigung.
Zeige: $m(E_{c,d}) = 0$, also $m(E) = 0$.
Sei $x \in E_{c,d}$: Es existiert ein $\xi < x$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c.$$

Setze $g(x) = f(x) - c \cdot x$. Dann gilt:

$$g(\xi) < g(x)$$

und mit dem Hilfssatz (Sunrise-Lemma) folgt dann:
$E_{c,d} \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$ mit $g(b_k) = g(a_k)$ oder

$$c(b_k - a_k) = f(b_k) - f(a_k).$$

Sei nun $x \in (a_k, b_k)$, $x \in E_{c,d}$:
Es existiert $\xi > x$, $\xi \in (a, b)$ mit: $g(x) := f(x) - dx$: $g(\xi) > g(x)$.
Hilfssatz, angewandt auf $[a_k, b_k]$:
$\Rightarrow E_{c,d} \cap (a_k, b_k) \subseteq \bigcup_\ell (a_{k_\ell}, b_{k_\ell})$ mit $g(a_{k_\ell}) = g(b_{k_\ell})$,
d. h. $d(b_{k_\ell} - a_{k_\ell}) = f(b_{k_\ell}) - f(a_{k_\ell})$. Setze

$$\Sigma_1 = \bigcup_k \bigcup_\ell (a_{k_\ell}, b_{k_\ell}).$$

Es ist

$$\begin{aligned} m(\Sigma_1) &= \sum_k \sum_\ell (b_{k_\ell} - a_{k_\ell}) = \frac{1}{d} \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell f(b_{k_\ell}) - f(a_{k_\ell}) \right)}_{\leq f(b_k) - f(a_k) = c(b_k - a_k)} \\ &= \underbrace{\frac{c}{d}}_{=q<1} \sum_k (b_k - a_k) = q \cdot m(\Sigma_1') \end{aligned}$$

mit $\Sigma_1' = \bigcup_k (a_k, b_k)$.
Zusammen: (1) $E_{c,d} \subseteq \Sigma_1'$ und $E \subseteq \Sigma_1$,

$$m(\Sigma_1) \leq q \cdot m(\sigma_1').$$

Wiederhole (1), angewandt auf die Teilintervalle von Σ_1.
Erhalte Σ_2, Σ_2' mit $E_{c,d} \subseteq \Sigma_2$,

$$\begin{gathered} m(\Sigma_2) \leq q \cdot m(\Sigma_2') \\ \Sigma_2' \subseteq \Sigma_1 \end{gathered}$$

und damit

$$m(\Sigma_2) \leq q^2 \cdot m(\Sigma_1').$$

Allgemein erhält man mit Induktion Σ_n, Σ_n' mit

$$\begin{gathered} m(\Sigma_n) \leq q \cdot m(\Sigma_n') \\ \Sigma_n' \subseteq \Sigma_{n-1} \\ E_{c,d} \subseteq \Sigma_n. \end{gathered}$$

Also gilt für jedes n

$$\begin{aligned} m(E_{c,d}) \leq m(\Sigma_n) &\leq q^n \cdot m(\Sigma_1') \\ &\leq q^n \cdot (b - a) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Damit ist $m(E_{c,d}) = 0$, also auch $m(E) = 0$ und $\Lambda_r \leq \lambda_\ell$ fast überall.

3.) analog zu 2.)

Behauptung 2: Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, wachsend, so gilt für das L-Integral

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq f(b) - f(a).$$

Beweis: Setze
$$f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}.$$
f_k ist meßbar.
Es ist fast überall
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f'(x).$$
Also ist f' meßbar (Setze $f' = 0$, wo die Ableitung nicht existiert).
Dann ist
$$\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b f_k(x)\,dx &= k\left[\int_a^b f\left(x+\frac{1}{k}\right)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\
&= k\left[\int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\
&= -\frac{\int_a^{a+1/k} f(x)\,dx}{\frac{1}{k}} + \frac{\int_b^{b+1/k} f(x)\,dx}{\frac{1}{k}} \\
&\overset{\odot}{\to} -f(a) + f(b).
\end{aligned}$$
Dabei ist $\odot$ eine frühere Aufgabe.
Es gilt also
$$\int_a^b f_k(x)\,dx \to f(b) - f(a).$$
Mit dem Lemma von Fatou gilt dann: $f' \in L$ und
$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

10.8.4 Beispiel

(Aufgabenblatt) Zu jeder Nullmenge $N \subseteq (a,b)$
gibt es eine stetige und wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to +\infty$$
für $x \in N$.

Konstruktion: Es gibt Intervalle I_k mit
$$\sum_k m(I_k) \leq 1, \qquad N \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} I_k \text{ für alle } n$$
$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap [a,x])$$
hat alle Eigenschaften.

10.8.5 Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion mit Ableitung 0

Gesucht ist eine Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f'(x) = 0$ fast überall, f ist stetig, $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
Konstruiere eine Folge (f_n) mit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$. Dabei soll f_n auf jedem Teilintervall $I_k^n = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]$ linear sein. Für $n = 0$ wird $f_0(x) = x$ gesetzt. Konstruiere nun f_n. Es ist

$$I_k^n = I_{2k}^{n+1} \cup I_{2k+1}^{n+1}.$$

Setze in $k \cdot 2^{-n}$ und $(k+1) \cdot 2^{-n}$, den Endpunkten von I_k^n

$$f_{n+1} = f_n.$$

Im Mittelpunkt $(2k+1) \cdot 2^{-n-1}$ (dies ist der rechte Mittelpunkt voon I_{2k}^{n+1}, bzw. der linke Endpunkt von I_{2k+1}^{n+1}) ist

$$f_{n+1}((2k+1) \cdot 2^{-n-1}) = \frac{1}{3} f_n(k \cdot 2^{-n}) + \frac{2}{3} f_n((k+1) \cdot 2^{-n}).$$

Zwischen diesen Punkten wird f_{n+1} linear definiert.
Alle f_n sind stetig und streng wachsend.

(a) $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert punktweise und ist schwach wachsend.
Da $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 1$ ist, existiert $f(x)$.
Da f_n monoton ist, ist auch f monoton, aber nicht unbedingt streng monoton.

(b) f ist streng monoton wachsend: Sei $0 \leq x < y \leq 1$. Wähle k und n so, daß

$$\begin{aligned} x &< k \cdot 2^{-n} \\ y &> (k+1) \cdot 2^{-n}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$f(x) \leq f(k \cdot 2^{-n}) = f_n k \cdot 2^{-n} < f_n((k+1)2^{-1}) = f((k+1)2^{-n}) \leq f(y).$$

(c) Sei $I_{k_n}^n = [\alpha_n, \beta_n]$ geschachtelt, d. h. $I_{k_n}^n \supseteq I_{k_{n+1}}^{n+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &\leq f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1}) && (10.4)\\
&= \begin{cases} \frac{1}{3} f(\alpha_n) + \frac{2}{3} f(\beta_n) - f(\alpha_n) & \text{im linken Intervall} \\ f(\beta_n) - \frac{1}{3} f(\alpha_n) - \frac{2}{3} f(\beta_n) & \text{im rechten Intervall} \end{cases} && (10.5)\\
&= \begin{cases} \frac{2}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) & \text{im linken Intervall} \\ \frac{1}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) & \text{im rechten Intervall} \end{cases} && (10.6)\\
&\leq \frac{2}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)). && (10.7)
\end{aligned}$$

(d) Stetigkeit in $x \in [0,1]$: Sei $x \in (\alpha_n, \beta_n] \cup [\beta_n, \gamma_n)$ mit $\alpha_n = k_n \cdot 2^{-n}$, $\beta_n = (k_n+1) \cdot 2^{-n}$ und $\gamma_n = (k_n+2) \cdot 2^{-n}$.
Sei $\varepsilon > 0$: Wähle n so, daß

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon.$$

Setze $I = (\alpha_n, \beta_n)$. Sei nun $y \in I$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq f(\gamma_n) - f(\alpha_n) \\ &= f(\gamma_n) - f(\beta_n) + f(\beta_n) - f(\alpha_n) \\ &\leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (f(1) - f(0)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

(e) Nach dem Satz existiert f' fast überall. Zeige nun: $f'(x) = 0$ dort, wo f' existiert.

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1})}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}} &= \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\right)\right) \\ &= \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Wenn $f'(x)$ existiert mit $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, dann ist

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \stackrel{\text{Ind.}}{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_k\right)$$

mit $\varepsilon_k = 1$ oder $\varepsilon_k = -1$. Setze

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_k\right) \text{ und } p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

p existiert genau dann, wenn $p = 0$ ist. Annahme $p > 0$:
Dann ist $(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_n) = \frac{p_{n+1}}{p_n} \to \frac{p}{p} = 1$ für $n \to \infty$.
Damit ist $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$. Widerspruch! Also ist $f'(x) = 0$ fast überall.

10.8.6 Satz

Seien $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, monoton wachsend und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{i} nftyf_k(x)$$

sei konvergent in $[a,b]$.
Dann ist f stetig, wachsend und es ist fast überall

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

Beweis: Sei OBdA $f_n(a) = 0$ (sonst betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_k(a))$. Setze

$$\begin{aligned}s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \\ r_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).\end{aligned}$$

f ist monoton wachsend (klar).
$0 \leq r_n(x) \leq r_n(b) \to 0$ für $n \to \infty$.
Also liegt gleichmäßige Konvergenz vor und damit ist f stetig.
Sei

$$E = \{x\colon f'(x) \text{ oder eine Ableitung } f_k'(x) \text{ existiert nicht.}$$

E ist Nullmenge. Sei $x \in [a,b] \setminus E$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x),$$

da $s_n'(x) \leq s_{n+1}'(x) \overset{\otimes}{\leq} f'(x)$ ist.
Dabei gilt $\otimes$, da $f = s_n + r_n$ und damit $f' = s_n' + \underbrace{r_n'}_{\geq 0} \geq s_n'$ ist.

Wähle n_k so, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(f(b) - s_{n_k}(b))}_{r_{n_k}(b)}$$

konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f(x) - s_{n_k}(x))$$

gleichmäßig, da

$$0 \leq \underbrace{f(x) - s_{n_k}(x)}_{= r_{n_k}(x)} \leq r_{n_k}(x).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f'(x) - s_{n_k}'(x))$$

konvergiert wie $\sum s_k'(x)$.
Also ist $s_{n_k}'(x) \to f'(x)$ für $k \to \infty$ und damit $x_n'(x) \to f'(x)$, da $((s_n'(x)) \uparrow)$.

10.8.7 Definition: absolute Stetigkeit

Eine Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gilt mit:
Sind $(a_k, b_k) \subseteq [a,b]$ für $k = 1, \ldots, n$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

10.8.8 Beispiele und Bemerkungen

(a) Absolut stetige Funktionen sind stetig.

(b) Funktionen der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

mit $f \in L([a,b])$ sind absolut stetig.

(c) Absolut stetige Funktionen sind von endlicher Variation, also insbesondere existiert F' fast überall.

(d) Wenn F absolut stetig ist, bigt es F_1, F_2, beide wachsend *und* absolut stetig, mit $F = F_1 - F_2$.

Beweis:

(a) Gilt nach Definition der absoluten Stetigkeit mit $n = 1$.

(b) Setze

$$E = \bigcup_k (a_k, b_k).$$

Es ist

$$m(E) = \sum (b_k - a_k) < \delta.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\,dt \\ &= \int_E |f(t)|\,dt \overset{\oplus}{<} \varepsilon.\end{aligned}$$

$\oplus$ gilt wegen der absoluten Stetigkeit des L-Integrals (10.5.15 auf Seite 291).

(c) Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein δ mit …(Definition).
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{\delta} \leq n$.
Sei Z Zerlegung von $[a,b]$:

$$\begin{aligned}(a + j \cdot h, a + (j+1) \cdot h) \setminus Z &= (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \cdots \cup (a_m, b_m) \\ \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{k-1}) &= h < \delta \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} |F(a_k) - F(a_{k-1})| &< 1.\end{aligned}$$

Für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:
$\Rightarrow \operatorname{var}(F, Z) < n$
$\Rightarrow V_a^b(F) \leq n$.

(d) In Analysis II wurde gezeigt, daß sich F, eine Funktion von endlicher Variation, folgendermaßen darstellen läßt:

$$F(x) - F(a) = p(x) - n(x).$$

Dabei ist p die positive und n die negative Variation:

$$p(x) = \sup\{\sum_{k=1}^{m}(F(x_k) - F(x_{k-1}))^+ \colon \{x_0, \dots, x_m\} \text{ ist Zerlegung von } [a,x]\}$$

Zeige: p ist absolut stetig.
Sei $\varepsilon > 0$ und dazu $\delta > 0$ aus der absoluten Stetigkeit von F.
Zerlegung $\{x_0, \dots, x_m\}$ von $[a,b]$ mit

$$p(b) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{m}(F(x_k) - F(x_{k-1}))^+.$$

Seien $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s) \subseteq [a,b]$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{k=1}^{s} b_k - a_k < \delta.$$

Es ist

$$Z_k = ((a_k, b_k) \cap Z) \cup \{a_k, b_k\} = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{\ell_k}^k\}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} \underbrace{p(b_k) - p(a_k)}_{\geq 0} &\overset{\text{ANA II}}{\leq} \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{\ell_k}(F(t_j^k) - F(t_{j-1}^k))^+ + \varepsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{\ell_k}|F(t_j^k) - F(t_{j-1}^k)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

(t_{j-1}^k, t_j^k) sind disjunkt für alle j und k,

$$\sum_{j,k}(t_j^k - t_{j-1}^k) = \sum_k b_k - a_k < \delta$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{s}(p(b_k) - p(a_k)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Also ist p absolut stetig.

10.8.9 Hauptsatz

$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann absolut stetig, wenn für das Lebesgue-Integral

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$

mit $f \in L([a,b])$ ist. Es gilt: $F'(x) = f(x)$ fast überall.

Beweis: Sei OBdA F monoton wachsend, bzw. $f \geq 0$ überall.

„$\Leftarrow$“: Sei

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$

mt $f \in L$ und $f \geq 0$.
F ist wachsend und absolut stetig (siehe Beispiel (b)).
Zeige noch: $F'(x) = f(x)$ fast überall.
Zuerst: $f \in L^+$, es existiert eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $\varphi_k \to f$ fast überall.
Setze

$$\Phi_k(x) = F(a) + \int_a^x \varphi_k(t)\,dt.$$

Es ist $\Phi_k'(x) = \varphi_k(X)$ außer in den Sprungstellen (Analysis I).
Mit $\Phi_0(x) = 0$ ist dann:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x)) &= \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)\\ &= F(a) + \int_a^x f(t)\,dt = F(x).\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\underbrace{\Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x)}_{\substack{\text{monoton}\\ \text{wachsende Funktion}}} = \int_a^x \underbrace{(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t))}_{\geq 0}\,dt \geq 0.$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}F'(x) &\overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_k'(x) - \Phi_{k-1}'(x))\\ &\overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k\\ &\overset{\text{f.ü.}}{=} f(x).\end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“: Sei F absolut stetig und monoton.
F' existiert fast überall und es ist $F' \geq 0$.
Es wurde schon gezeigt, daß F' integrierbar ist mit

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Setze

$$\Phi(x) := \int_a^x F'(t)\,dt.$$

$h(x) := F(x) - \Phi(x)$ ist als Differenz zweier absolut stetiger Funktionen absolut stetig und monoton wachsen, denn für $a \leq x < y \leq b$ gilt:

$$h(y) - h(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y F'(t)\,dt \geq 0.$$

Nach dem 1. Teil des Beweises ist

$$h' = f' - \Phi' = F' - F' = 0 \text{ fast überall.}$$

Zeige noch, daß h konstant ist. Setze

$$N = \{x\colon h'(x) \text{ existiert oder ist größer als } 0\}.$$

N ist Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$. Dazu gehöre aus der absoluten Stetigkeit von h ein $\delta > 0$. Dann existieren (α_ν, β_ν) mit

$$N \subseteq \bigcup_\nu (\alpha_\nu, \beta_\nu)$$

und

$$\sum_\nu \beta_\nu - \alpha_\nu < \delta.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt (mit der absoluten Stetigkeit von h):

$$\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu - \alpha_\nu < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{\nu=1}^n h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) < \varepsilon.$$

Für $n \to \infty$ gilt:

$$\sum_{\nu=1}^\infty h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt:

$$m\left(h\left(\bigcup_\nu (\alpha_\nu, \beta_\nu)\right)\right) \leq \sum_\nu h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) \leq \varepsilon.$$

Sei $x \in (a,b) \setminus N = E$. Dann existiert ein $\xi > x$ mit

$$\frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x} < \varepsilon,$$

da $h'(x) = 0$ ist. Also existiert ein $\xi > x$ mit

$$h(\xi) - \varepsilon \cdot \xi > h(x) - \varepsilon \cdot x.$$

Nach dem Sunrise-Lemma gilt dann:

$$E = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

mit

$$h(a_k) - \varepsilon \cdot a_k = h(b_k) - \varepsilon \cdot b_k$$
$$h(b_k) - h(a_k) = \varepsilon \cdot (b_k - a_k)$$
$$h([a,b]) \subseteq \{a,b\} \cup \bigcup_\nu (h(\alpha_\nu), h(\beta_\nu)) \cup \bigcup_k (h(a_k), h(b_k))$$

und

$$m(h([a,b])) \le \sum_{\nu} h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) + \sum_k \underbrace{h(b_k - h(a_k)}_{=\varepsilon\cdot(b_k - a_k)}$$
$$\le \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Also ist $m(h([a,b])) = 0 = m([h(a), h(b)])$.
Also ist $h(a) = h(b)$, d. h. h ist konstant (h ist monoton wachsend).

10.8.10 Folgerungen aus dem Hauptsatz

Folgerung 1: Absolut stetige Funktionen sind nullmengentreu, d. h.

$$m(N) = 0 \;\Rightarrow\; m(F(N)) = 0.$$

Folgerung 2: Ist F stetig und von endlicher Variation auf $[a,b]$, so ist $F = \Phi + G$ mit absolut stetigem Φ und G von endlicher Variation mit $G' = 0$ fast überall.

Beweis:

Folgerung 1: Als Aufgabe:

$$m(F(N)) \le \int_N |F'(x)|\,dx = 0.$$

Folgerung 2: (Beweis des Hauptsatzes)
F' existiert fast überall, $F' \in L([a,b])$ und

$$\Phi(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$$

ist absolut stetig.
$G := F - \Phi$ ist von endlicher Variation und $G' = F' - \Phi' = 0$ fast überall.

11 Vektoranalysis[1]

11.1 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

11.1.1 Definition: Normalbereich

Ein *y-Normalbereich* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Menge

$$B = \{(x,y)\colon a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

wobei φ und ψ stückweise C^1 sind, sowie $\varphi(x) < \psi(x)$ in (a,b) ist. ∂B wird als geschlossene Kurve

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$

aufgefaßt. Dabei ist

$$\begin{aligned}
\gamma_1\colon & \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix},\ a \le t \le b \\
\gamma_2\colon & \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix},\ \varphi(b) \le t \le \psi(b) \\
\gamma_3\colon & \begin{pmatrix} t \\ \psi(t) \end{pmatrix},\ a \le t \le b \\
\gamma_4\colon & \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix},\ \varphi(a) \le t \le \psi(a)
\end{aligned}$$

11.1.2 Integralsatz von Gauß

Sei B ein xy-Normalbereich, $u, v\colon B \to \mathbb{R}$ seien stetig und u_x, v_y seien stetig und beschränkt in B^0. Dann gilt:

$$\int\limits_B (u_x + v_y)\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u\, dy - v\, dx$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int\limits_B v_y\, d(x,y) &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} v_y(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_a^b v(x,\psi(x))\, dx - \int\limits_a^b v(x,\varphi(x))\, dx \\
&= \int\limits_a^b v(t,\psi(t))\, dt - \int\limits_a^b v(t,\varphi(t))\, dt \\
&= -\int\limits_{-\gamma_3} v(x,y)\, dx - \int\limits_{\gamma_1} v(x,y)\, dx
\end{aligned}$$

[1] Version 4.8 vom 19. Dezember 2002

Außerdem ist

$$\int\limits_{\gamma_2} v(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(b)}^{\psi(b)} v(b,t)\cdot 0\,dt = 0 = \int\limits_{\gamma_4} v(x,y)\,dx = 0.$$

Zusammen gilt also:

$$\int\limits_B v_y\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} -v\,dx.$$

Genauso wird gezeigt, daß

$$\int\limits_B u_x\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u\,dy$$

ist.✓

11.1.3 Bemerkungen

(a) Der Satz von Gauß gilt für Normalbereiche $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$, mit xy-Normalbereichen B_j, wobei $B_j^0 \cap B_k^0 = \emptyset$ für $j \neq k$ ist.

(b) Sei $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} f = u_x + v_y$$

Divergenz von f.

(c) ∂B sei parametrisiert nach der Bogenlänge:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(s) \\ \Psi(s) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq L(\partial B) = \text{Länge von } \partial B$$

Es ist dabei

$$\big(\Phi'(s)\big)^2 + \big(\Psi'(s)\big)^2 = 1$$

(außer für endlich viele s).
Der Tangentialvektor von ∂B an der Stelle s_0 ist

$$\begin{pmatrix} \Phi'(s_0) \\ \Psi'(s_0) \end{pmatrix}$$

An dieser Stelle gilt für den Normalenvektor ν:

$$\nu = \begin{pmatrix} \Psi'(s_0) \\ -\Phi'(s_0) \end{pmatrix}, \qquad \|\nu\| = 1$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B} u\,dy - v\,dx &= \int\limits_0^{L(\partial B)} \big(u\cdot\Psi' - v\cdot\Phi'\big)\,ds \\ &= \int\limits_0^{L(\partial B)} f\cdot\nu\,ds \end{aligned}$$

(d) Divergenzsatz (Zusammenfassung von (b) und (c)):

$$\int_B \operatorname{div} f \, d(x,y) = \int_{\partial B} \nu \cdot f \, ds$$

11.1.4 Folgerung: Fläche eines Normalbereiches

Ein Normalbereich hat das Maß

$$m(B) = \int_{\partial B} x \, dy = -\int_{\partial B} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} x \, dy - y \, dx$$

Beweis: Wähle

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \text{ oder } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für alle diese Funktionen ist

$$\operatorname{div} f = 1.$$

Deshalb ist

$$m(B) = \int_B 1 \, d(x,y) \int_{\partial B} x \, dy = \cdots$$

11.1.5 Beispiel: Fläche einer Ellipse

Zu berechnen sei die Fläche einer Ellipse

$$B = \left\{ (x,y) \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Für den Rand der Ellipse gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 b^2 = 1$$

Setze für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_{\partial B} \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot a(-\sin t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cdot b \, dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot 2\pi = \pi \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

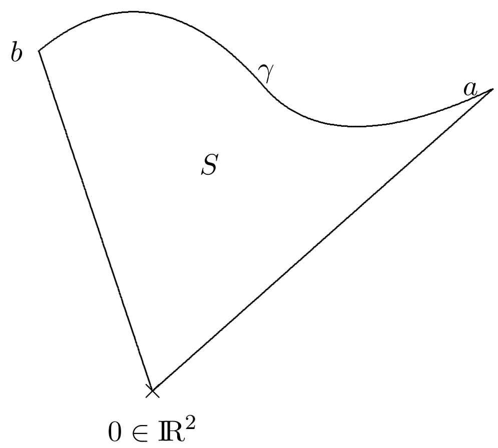


Abbildung 11.1: Sektor im $\mathbb{R}^2$ zur Verdeutlichung der Leibnizschen Sektorformel

11.1.6 Leibnizsche Sektorformel

Sei S ein Sektor, der von einem C^1-Jordanbogen γ begrenzt wird (siehe Abbildung 11.1) Es ist dann:

$$m(S) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx$$

Beweis: falls S Normalbereich:

$$\partial S = \overline{0a} + \gamma + \overline{b0}$$

Für die Strecke $0a$ gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t \\ a_2 t \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \le t \le 1 \text{ und } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann:

$$x\,dy - y\,dx = a_1 t a_2\,dt - a_2 t a_1\,dt = 0\,dt$$

$$\Rightarrow m(S) = \int\limits_{\partial B} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

11.1.7 Beispiel zu Gauß

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $u, v \in C^1(D)$.
Zusätzlich sollen die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten:

$$u_x - v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow u_x - v_y = 0$$

Sei nun $B \subseteq D$ Normalbereich.
Dann folgt mit Gauß für u und $-v$:

$$0 = \int (u_x - v_y)\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u\,dy + v\,dx$$

und für v und u:

$$0 = \int (v_x + u_y)\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} v\, dy - u\, dx$$

Setze nun $z = x + iy$ und

$$f(z) := u(x,y) + i \cdot v(x,y).$$

f heißt differenzierbar in z, wenn für $h \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z)$$

existiert.
f heißt *holomorph*, wenn f im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist. f diffbar $\Rightarrow$ Cauchy-Riemann gilt (Aufgabe). Beschreibe den Rand von B mit

$$\partial B\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b.$$

Komplex ist dann:

$$z = \varphi(t) + i \cdot \psi(t)$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B} f(z)\, dz &:= \int\limits_{\partial B} (u + iv)(\varphi' + i\psi')\, dt \\
&= \int\limits_a^b (u\varphi' - v\psi')\, dt + i \int\limits_a^b (u\psi' + v\varphi')\, dt \\
&= \int\limits_{\partial B} u\, dx - v\, dy + i \int\limits_{\partial B} u\, dy + v\, dx = 0
\end{aligned}$$

(Cauchy'scher Integralsatz)

11.1.8 Die Greenschen Formeln

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subseteq D$ ein Normalbereich und $u, v\colon D \to \mathbb{R}$. Dann gelten

1. $(u \in C^1(D),\ v \in C^2(D))$

$$\int\limits_B (u \triangle v + (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v))\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds$$

2. $(u, v \in C^2(D))$

$$\int\limits_B (u \triangle v - v \triangle u)\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

mit dem Laplace-Operator $\triangle$:

$$\triangle u := u_{xx} + u_{yy}$$

und ν, der äußeren Normalen von ∂B.

Beweis

1. Setze
$$f = \begin{pmatrix} u \cdot v_x \\ u \cdot v_y \end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$\begin{aligned} \operatorname{div} f = (uv_x)_x + (uv_y)_y &= u_x v_x + u v_{xx} + u_y v_y + u v_{yy} \\ &= u \triangle v + (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) \end{aligned}$$
Mit $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ gilt dann:
$$\begin{aligned} f \cdot \nu &= u(v_x \cdot \nu_1 + v_y \cdot \nu_2) \\ &= u \cdot (\operatorname{grad} v) \cdot \nu \\ &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{(Richtungsableitung)} \end{aligned}$$
Gaußschen Satz anwenden:✓
2. Folgt aus 1.: u und v vertauschen, dann beide Integrale voneinander abziehen.

11.1.9 Definition: harmonisch, Potentialfunktion

$u \in C^2(D)$ heißt *harmonisch* oder *Potentialfunktion*, wenn $\triangle u = 0$ in D.

11.1.10 Gaußsche Mittelwertformel

Sei u harmonisch in D, $(x_0, y_0) \in D$. Dann gilt
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$$
für $0 < r < r_0(x_0, y_0)$.

Beweis: Sei OBdA $(x_0, y_0) \equiv (0, 0)$:
2. Greensche Formel für $v \equiv 1$:
$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0$$
Setze $B = K(0, r)$: Dann ist
$$\partial B\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
Für den Normalenvektor gilt:
$$\nu = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Mit $ds = r\,d\theta$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} (u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta) \qquad |u_x(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
0 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \\
&= \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \\
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta = \text{const} \quad \text{für } 0 < r < r_0
\end{aligned}
$$

Für $r \to 0$ geht das Integral gegen $u(0,0) \cdot 2\pi$.

11.1.11 Minimum- Maximum-Prinzip

Ist u stetig in $\overline{D}$ und harmonisch in D, so ist u konstant oder

$$\min_{\partial D} u < u(x,y) < \max_{\partial D} u \text{ für } (x,y) \in D.$$

Beweis: Für max. (Für min betrachte $-u$): Setze

$$
\begin{aligned}
M &= \max_{\overline{D}} u \\
A &= \{(x,y) \in D \colon u(x,y) = M\} \\
B &= D - A = \{(x,y) \in D \colon u(x,y) < M\}
\end{aligned}
$$

B ist offen, da u stetig ist.
Sei nun $(x_0, y_0) \in A$:

$$
\begin{aligned}
M &= u(x_0, y_0) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta}_{\leq M}\,d\theta \text{ für } 0 < r < r_0 \\
&\leq M
\end{aligned}
$$

Da u stetig ist, gilt für $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r < r_0$:

$$u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = M.$$

Das heißt, daß $K((x_0, y_0), r_0) \subseteq A$, A offen.
Da $A \cap B = \emptyset$ und D zusammenhängend, folgt:
$\Rightarrow$ 1. Alternative: $A = \emptyset$, $B = D$: $u < M$ in D.
$\Rightarrow$ 2. Alternative: $B = \emptyset$, $A = D$: $u = M$ in D.

11.2 Flächen im $\mathbb{R}^3$

11.2.1 Definition: Vektorprodukt

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

heißt

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_1 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt oder *Kreuzprodukt*.
Mit den Einheitsvektoren e^1, e^2 und e^3 ist

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e^1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e^3.$$

Symbolisch geschrieben:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 & a_1 & b_1 \\ e^2 & a_2 & b_2 \\ e^3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

11.2.2 Bemerkungen/Regeln

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) $a \times b = -b \times a$.

(b) $(\lambda a + \mu b) \times c = \lambda(a \times c) + \mu(b \times c)$.

(c) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

(d)

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(a, b, c).$$

(e) $a \times b = 0 \iff a, b$ sind linear abhängig.

(f) $a \times b$ ist orthogonal zu a und b, also auch zu

$$E = \{\lambda a + \mu b \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

(g) Seien a und b linear unabhängig und

$$P = \{\lambda a + \mu b \colon 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

das von a und b aufgespannte Parallelotop. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(a, b, a \times b) =& \text{3-dimensionales Volumen von} \\ & \{\lambda a + \mu b + \nu(a \times b) \colon 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1\} \\ =& \text{Fläche von } P = \|a \times b\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\det(a, b, a \times b) = (a \times b) \cdot (a \times b) = \|a \times b\|^2$$

und

$$\text{Fläche von } P = \|a \times b\|$$

11.2.3 Def.: Parameterdarstellung eines Flächenstücks

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^3$ heißt *Parameterdarstellung* des Flächenstücks $\Phi(D)$, wenn gilt:

1) Φ ist stetig differenzierbar, $\operatorname{rg} \Phi' = 2$ überall,

2) Φ ist injektiv.

Die Ebene durch den Punkt $\Phi(u, v)$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u, v) + \lambda \Phi_u(u, v) + \mu \Phi_v(u, v) \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt Tangentialebene im Punkt $\Phi(u, v)$.

$$\nu = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$$

ist der Normalenvektor an $\Phi(D)$. ν steht senkrecht auf der Tangentialebene.

11.2.4 Explizite Fläche

„$z = \varphi(x, y)$“: Sei $\varphi \in C^1(D)$, $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$.
Setze

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u, v) \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rg} \Phi' = 2,$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_u \\ -\varphi_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\varphi_u \\ -\varphi_v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.2.5 Mantelfläche

γ sei ein ebener Jordanbogen mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix}, \quad a \leq s \leq b.$$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix}$$

ist injektiv, $\varphi, \psi \in C^1([a,b])$.
Seien $\alpha, \beta \colon (a,b) \to \mathbb{R}$, C^1, $\alpha < \beta$.
Wähle

$$D = \{(s,t) \colon a < s < b,\ \alpha(s) < t < \beta(s)\}$$

und die Parameterdarstellung

$$\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ t \end{pmatrix}$$

mit

$$\Phi_s \times \Phi_t = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(s) \\ -\varphi'(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11.2.6 Rotationsfläche

„$r = r(x)$“: Sei $r \colon (a,b) \to (0,\infty)$ stetig differenzierbar. Rotiere den Graphen von r um die x-Achse.
Wähle

$$D = \{(t,\theta) \colon a < t < b,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Dann ist

$$\Phi(t,\theta) = \begin{pmatrix} t \\ r(t)\cos\theta \\ r(t)\sin\theta \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung einer Rotationsfläche mit

$$\Phi_t \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ r'(t)\cos\theta \\ r'(t)\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r(t)\sin\theta \\ r(t)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cdot r'(t) \\ -r(t)\cos\theta \\ -r(t)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

11.2.7 Satz

Stellen $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi \colon G \to \mathbb{R}^3$ dasselbe Flächenstück $\mathcal{F} = \Phi(D) = \Psi(G)$ dar, dann gibt es einen Diffeomorphismus $h \colon D \to G$ (h injektiv, C^1 und h^{-1} ebenfalls injektiv und C^1) mit $\Phi = \Psi \circ h$.

Beweis: Definiere $h = \Psi^{-1} \circ \Psi$. Zeige: $h \in C^1$.
Es ist $\operatorname{rg} \Psi' = 2$. Sei $(s_0, t_0) \in G$: Dann gilt z. B.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } (s_0, t_0).$$

Setze

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

$\overline{\Psi}$ hat Umkehrfunktion in einer Umgebung von $\overline{\Psi}(s_0, t_0) = (u_0, v_0)$.
$\overline{\Psi}^{-1}$ ist C^1 (Satz über die Umkehrfunktion bei mehreren Veränderlichen).
$\overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$ ist C^1 in einer Umgebung von (u_0, v_0).
Es gilt: $h = \overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$ in Umgebung von (u_0, v_0).
Es ist $\overline{\Phi} = \overline{\Psi} \circ h$ nach Definition.

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 = \Psi_1 \circ h \\ \Phi_2 = \Psi_2 \circ h \end{array}\right\} \overline{\Phi} = \overline{\Psi} \circ h,\ h = \overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$$

$\Phi_3 = \Psi_3 \circ h$
Dasselbe für $h^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi$, also ist auch h^{-1} in C^1.

11.2.8 Zusatz

Es gilt:

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s \times \Psi_t) \circ h \cdot \det h'.$$

Beweis: Es ist $\Phi = \Psi \circ h$.
Damit ist $\Phi' = \Psi' \circ h \cdot h'$. Setze

$$\begin{aligned} \Phi' &= (\Phi_u, \Phi_v) =: (a, b) \\ \Psi' &= (\Psi_x, \Psi_t) =: (c, d) \end{aligned}$$

und

$$h' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabei sei

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ldots$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a &= c_{11} c + c_{21} d \\ b &= c_{12} c + c_{22} d \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \Phi_u \times \Phi_v = a \times b &= c_{11} c_{22} (c \times d) + c_{21} c_{12} (d \times c) \\ &= (c_{11} c_{22} - c_{21} c_{12})(c \times d) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} (c \times d) \end{aligned}$$

11.2.9 Definition: Flächenintegral, Oberfläche

Ist $\mathcal{F}$ ein Flächenstück und $f\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$\int_{\mathcal{F}} f\, do := \int_{D} f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, d(u,v)$$

Oberflächenintegral von f über $\mathcal{F}$, und

$$\int_{\mathcal{F}} do = \int_{D} \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, d(u,v)$$

die Oberfläche von $\mathcal{F}$ (Flächeninhalt).

11.2.10 Satz

Die Definition von

$$\int_{\mathcal{F}} f\, do$$

ist unabhängig von der Parameterdarstellung Φ.

Beweis: Seien $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ zwei Darstellungen von $\mathcal{F}$. Es ist dann $\Phi = \Psi \circ h$ und

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s \times \Psi_t) \circ h \cdot \det h'.$$

Damit ist

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \|(\Psi_s \times \Psi_t) \circ h\| \cdot |\det h'|$$

und mit der Transformationsformel gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{D} f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, d(u,v) \\
&\quad = \int_{D} f(\Psi(h(u,v))) \cdot \|(\Psi_s \times \Psi_t) \circ h(u,v)\| \cdot |\det h'(u,v)|\, d(u,v) \\
&\quad = \int_{G} f(\Psi(s,t)) \|\Psi_s \times \Psi_t\|\, d(s,t)
\end{aligned}$$

11.2.11 Beispiele

Explizite Fläche: Sei $z = \varphi(x,y)$, $\varphi \in C^1(D)$. Dann ist

$$\int_{\mathcal{F}} f\, do = \int_{D} f(x,y,\varphi(x,y)) \sqrt{1 + (\varphi_x(x,y))^2 + (\varphi_y(x,y))^2}\, d(x,y)$$

Konkret: Oberfläche der nördlichen Halbkugel: Setze

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

für

$$(x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2<1\right\}.$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
\text{Oberfläche} &= \int_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,d(x,y) = \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,d(x,y)\\
&= \left|\begin{matrix}\text{Polarkoordinaten:}\\ x = r\cos t\\ y = r\sin t\end{matrix}\right| = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\,d\theta\,dr\\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = 2\pi\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi
\end{aligned}$$

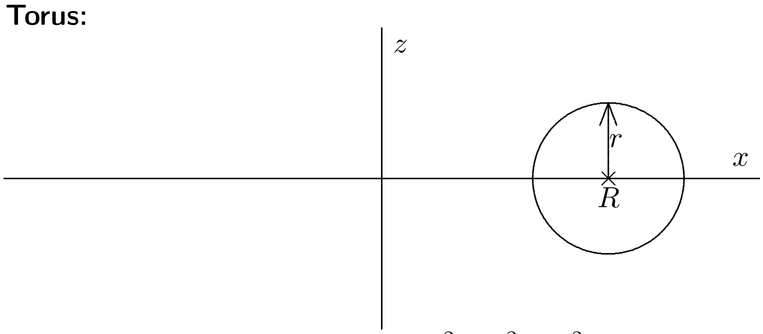
Rotationsfläche: $r = r(x)$:

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do = \int_a^b\int_0^{2\pi} f(t, r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta) r(t)\cdot\sqrt{1+(r'(t))^2}\,d\theta\,dt$$

Mantelfläche:

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do = \int_a^b\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} f(\varphi(s),\psi(s),t)\sqrt{q+(\varphi'(s))^2+(\psi'(s))^2}\,dt\,ds$$

z. B. Torus:



Darstellung der Kreislinie: $(x-R)^2+z^2 = r^2$, $y=0$.
Polarkoordinaten der Kreislinie:

$$\begin{aligned}
x &= R + r\cos\theta\\
y &= 0\\
z &= r\sin\theta
\end{aligned}$$

Darstellung des Torus:

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(R+r\cos\theta)\cdot\cos\varphi\\ (R+r\cos\theta)\cdot\sin\varphi\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$$

mit $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \theta < 2\pi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta \times \Phi_\varphi &= \begin{pmatrix} -r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ -r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)(-\sin\varphi) \\ (R + r\cos\theta)(\cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -r(R + r\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ r(R + r\cos\theta)\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ r(R + r\cos\theta)\sin\theta\cdot(-1) \end{pmatrix} \\
\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\| &= r(R + r\cos\theta)\cdot 1
\end{aligned}$$

Für die Oberfläche gilt dann:

$$\begin{aligned}
\text{Oberfläche} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi \\
&= 2\pi\left(2\pi\cdot r\cdot R + r\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right) = (2\pi R)(2\pi r)
\end{aligned}$$

11.2.12 Bemerkungen

(a)

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do$$

heißt auch *nichtorientiertes Flächenintegral.*

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Flächenstück, $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$, $\nu = \frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|}$.
$g\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ sei Vektorfeld mit $g = (g_1, g_2, g_3)^T$.

$$\int_F g\cdot\nu\,do$$

ist wohldefiniert und ist das *orientierte* Flächenintegral.
Sei jetzt $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ eine zweite Darstellung der Fläche mit $\Phi = \Psi\circ h$, $h\colon D \to G$ ist Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s\times\Psi_t)\circ g\cdot\det h'$$

$$\frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|} = \frac{\Psi_s\times\Psi_t}{\|\Psi_s\times\Psi_t\|}. \qquad \underbrace{\frac{\det h'}{|\det h'|}}_{\equiv +1 \text{ oder } -1 \text{ überall}}$$

Das heißt, daß das Vorzeichen von ν von Φ abhängt.

(c) Sind $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ Flächenstücke mit $\mathcal{F}_j \cap \mathcal{F}_k = \emptyset$ für $j \neq k$, so setzt man

$$\int_{\mathcal{F}_1\cup\cdots\cup\mathcal{F}_m} f\,do := \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{F}_j} f\,do.$$

11.3 Integralsätze (Gauß, Stokes) im $\mathbb{R}^3$

11.3.1 Definition/Motivation

Ein z-Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Menge der Form

$$B = \{(x,y,z) \colon \varphi(x,y) < z < \psi(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

mit einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$, das von einer stückweise C^1-Kurve berandet ist und mit stetig differenzierbaren $\phi, \psi \colon D \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$ in D und φ, ψ stetig in $\overline{D}$.
Der Rand ∂B wird aufgefaßt als Vereinigung von drei Flächenstücken: dem Manten, dem Boden und dem Deckel.
Der Mantel M ist

$$M = \{(x,y,z) \colon (x,y) \in \partial D,\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y)\}\,.$$

Die Normale ν am Mantel ist

$$\nu = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Boden F_u ist

$$F_u = \{(x,y,\varphi(x,y)) \colon (x,y) \in D\}\,.$$

Die Normale ν am Boden ist

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \begin{pmatrix} \varphi_x(x,y) \\ \varphi_y(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Deckel F_o ist

$$F_O = \{(x,y,\psi(x,y)) \colon (x,y) \in D\}\,.$$

Die Normale ν am Boden ist

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}} \begin{pmatrix} -\psi_x(x,y) \\ psi_y(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $w \colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ stetig, w_z stetig in B und beschränkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_B w_z(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} w_z\, dz \right) d(x,y) \\
&= \int\limits_D w(x,y,\psi(x,y))\, d(x,y) - \int\limits_D w(x,y,\varphi(x,y))\, d(x,y) \\
&= \int\limits_D w(x,y,\psi(x,y)) \cdot \nu_3 \cdot \sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}\, d(x,y) \\
&\quad - \int\limits_D w(x,y),\varphi(x,y)) \cdot \nu_3 \cdot \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\, d(x,y) \\
&= \int\limits_{F_o} w \cdot \nu_3\, do + \int\limits_{F_u} w \cdot \nu_3\, do + \underbrace{\int\limits_M w \cdot \nu_3\, do}_{=0, \text{ da } \nu_3 = 0}
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\partial B} w \cdot \nu_3 \, do \text{ (Nach Definition)}$$

11.3.2 Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$

$$\int\limits_{B} \operatorname{div} f \, d(x,y,z) = \int\limits_{\partial B} f \cdot \nu \, do$$

Dabei gilt:
$B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein xyz-Normalbereich,
$f = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ist ein C^1-Vektorfeld in B, stetig auf $\overline{B}$,
u_x, v_y, w_z seien beschränkt,
∂B wird als Vereinigung von Flächen aufgefaßt, ν =Normale zur Fläche ∂B und

$$\operatorname{div} f = u_x + v_y + w_z$$

Beweis: ✓, siehe oben, fasse für alle drei Richtungen zusammen.

11.3.3 Bemerkung

1) Die Greenschen Formeln (siehe 11.1.8 auf der Seite 327) gelten auch hier (mit $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$).
2) Der Gaußsche Satz gilt für *Normalbereiche*, d. h. endliche disjunkte Vereinigung von xyz-Normalbereichen.

11.3.4 Bezeichnungen der Vektoranalysis

Der *Nablaoperator*:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Es ist

$$\nabla u = (u_x, u_y, u_z) = \operatorname{grad} u$$

Der *Laplaceoperator*:

$$\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Formal gilt:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 (= \nabla^2)$$

Die *Divergenz* von f:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Die *Rotation* von f:

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

Es ist

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f$$

11.3.5 Regeln

Sei u eine skalare Funktion, f ein Vektorfeld, definiert in $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist

1. $\operatorname{rot}(uf) = u \operatorname{rot} f + (\nabla u) \times f$ für $u, f \in C^1$.
2. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ für $u \in C^2$.
3. $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$ für $f \in C^2$.

11.3.6 Satz: Lemma von Poincaré

Im Lemma von Poincaré (9.5.6 auf Seite 254) wurde gezeigt:
Im Sterngebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$ besitzt ein C^1-Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot} f = 0$ ist.

11.3.7 Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es ist

$$\int\limits_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} f) \cdot \nu \, do = \int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Dabei ist:

1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar, injektiv, $\operatorname{rg} \Phi' = 2$
2. $B \subseteq D$, B Normalbereich
3. $\mathcal{F} = \Phi(B)$ Fläche
4. $\partial\mathcal{F} := \Phi(\partial B)$ Kurve im $\mathbb{R}^3$
5. $f = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ist C^1-Vektorfeld in einer offenen Menge $U \supset \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F}$.

Beweis: Sei ∂B parametrisiert nach der Bogenlänge:

$$\begin{matrix} u = \varphi(s) \\ v = \psi(x) \end{matrix} \qquad 0 \leq s \leq \text{Länge von } \partial B = L$$

Φ habe die Koordinaten X, Y und Z:

$$p(u,v) := P(\Phi(u,v)) = P(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

Damit gilt für $\partial\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
x &= X(\varphi(s), \psi(s)) \\
y &= Y(\varphi(s), \psi(s)) \\
z &= Z(\varphi(s), \psi(s))
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\,dx &= \int\limits_0^L p(\varphi(s), \psi(s)) \cdot \left(\frac{d}{ds} X(\varphi(s), \psi(s))\right) ds \\
&= \int\limits_0^L p(X_u \cdot \varphi' + X_v \cdot \psi')\,ds = \int\limits_{\partial B} pX_u\,du + pX_v\,dv \\
&\overset{\odot}{=} \int\limits_B ((pX_v)_u - (pX_u)_v)\ d(u,v)
\end{aligned}$$

(mit $\odot$: Gauß im $\mathbb{R}^2$).
Nach dem Satz von H. A. Schwarz gilt:

$$(pX_v)_u - (pX_u)_v = p_u X_v - p_v X_u$$

Für den Gradienten von p gilt:

$$\begin{aligned}
p_u &= P_x X_u + P_y Y_u + P_z Z_u \\
p_v &= P_x X_v + P_y Y_v + P_z Z_v
\end{aligned}$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
(pX_v)_u - (pX_u)_v &= p_u X_v - p_v X_u \\
&= P_x X_u X_v - P_x X_v X_u + P_z Z_u X_v - P_z Z_v X_u \\
&= P_y \begin{pmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{pmatrix} + P_z \begin{pmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zusammen gilt dann für das Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{F}} P\,dx &= \int\limits_B ((pX_v)_u - (pX_u)_v)\,d(u,v) \\
&= \int\limits_B P_y \begin{pmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{pmatrix} + P_z \begin{pmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{pmatrix} \\
&\overset{?}{=} \int\limits_{\mathcal{F}} (-P_y \nu_3 + P_z \nu_2)\,do
\end{aligned}$$

Gilt das „?“?
Sei

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{F}} (-P_y \cdot \nu_3 + P_z \cdot \nu_2)\, do &= \int\limits_B (-P_y \cdot \nu_3 + P_z \cdot \nu_2) \cdot \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, d(u,v) \\ &= \int\limits_B (-P_y \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)_3 + P_z (\Phi_u \times \Phi_v)_2)\, d(u,v)\end{aligned}$$

Für $\Phi_u \times \Phi_v$ gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_u \times \Phi_v &= \begin{vmatrix} e^1 & X_u & X_v \\ e^2 & Y_u & Y_v \\ e^3 & Z_u & Z_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix} e^1 - \underbrace{\begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix} e^2}_{\nu_2} + \underbrace{\begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix} e^3}_{\nu_3},\end{aligned}$$

d. h.: Das „?“ gilt, wenn

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| \cdot (-\nu_3) = \begin{vmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{vmatrix}$$

und

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| \cdot \nu_2 = \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix}$$

Dies ist erfüllt. ✓
Zusammen gilt dann:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\, dx &= \int\limits_{\mathcal{F}} (-P_y \nu_3 + P_z \nu_2)\, do \\ \int\limits_{\partial\mathcal{F}} Q\, dy &= \int\limits_{\mathcal{F}} (-Q_z \nu_1 + Q_x \nu_3)\, do \\ \int\limits_{\partial\mathcal{F}} R\, dz &= \int\limits_{\mathcal{F}} (-R_x \nu_2 + R_y \nu_1)\, do.\end{aligned}$$

Addition liefert:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz &= \int\limits_{\mathcal{F}} \nu_1 (R_y - Q_z) + \nu_2 (P_z - R_x) + \nu_3 (Q_x - P_y)\, do \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}} \nu \cdot \operatorname{rot} f\, do\end{aligned}$$

11.4 Differentialformen

In diesem Abschnitt gilt immer: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Alle Funktionen $U \to \mathbb{R}$ sind wenigstens stetig, bzw. aus C^n.

11.4.1 Definition: multilinear, alternierend, p-Form

Eine stetige Funktion $\omega\colon U \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-mal}}$ heißt p-Form ($0 \leq p \leq n$), wenn sie *multilinear* und *alternierend* ist.
Sei $\omega(x, h^1, h^2, \dots, h^p)$ mit $h^1, \dots, h^p \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$.
Dann heißt multilinear:

$$\omega(x, \dots, \alpha h^i + \beta k^i, \dots, h^p) = \alpha \cdot \omega(x, \dots, h^i, \dots) + \beta \cdot (x, \dots, k^i, \dots)$$

und alternierend:

$$\omega(\dots h^i \dots h^j \dots) = -\omega(\dots h^j \dots h^i \dots) \text{ für } i \neq j$$

11.4.2 Beispiele

(a) $p = 0$: Dann ist $\omega\colon U \to \mathbb{R}$ stetige Funktion.

(b) $p = 1$:

$$\omega(x, h) = \omega\left(x, \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \cdot e^\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu) h_\nu$$

(Linearform)

(c) $p = 2$:

$$\omega(x, h, k) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu, k) h_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu, e^\mu) h_\nu h_\mu$$

(quadratische Form)
$(\omega(x, e^\nu, e^\mu))_{\mu,\nu=1}^{n}$ ist schiefsymmetrisch:

$$\omega(x, e^\nu, e^\mu) = -\omega(x, e^\mu, e^\nu)$$

(d) $p = n$:

$$\omega(x, h^1, \dots, h^n) = a(x) \begin{vmatrix} h_1^1 & h_1^2 & \dots & h_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n^1 & h_n^2 & \dots & h_n^n \end{vmatrix}$$

11.4.3 Grundformen

Für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$\omega(h^1, \dots, h^p) := \begin{vmatrix} h_{i_1}^1 & \dots & h_{i_1}^p \\ h_{i_2}^1 & & h_{i_2}^p \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i_p}^1 & \dots & h_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

Grundform. Sie wird bezeichnet mit

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}(h^1, \dots, h^p) = \omega(h^1, \dots, h^p)$$

11.4.4 Beispiel

(b) $p = 1$:

$$\omega(x,h) = \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\omega(x, e^\nu)}_{a_\nu(x)} \, dx_\nu(h)$$

(c) $p = 2$:

$$\omega(x,h,k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \underbrace{\omega(x, e^\nu, e^\mu)}_{a_{\nu\mu}(x)} \, dx_\nu \wedge dx_\mu$$

(d) $p = n$:

$$\omega = a(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

11.4.5 Darstellungssatz

Jede p-Form läßt sich darstellen als

$$(*) \qquad \omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1\ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} b_{i_1\ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Beweis: in 11.4.7

11.4.6 Beispiele im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3 \Rightarrow n = 3$.
$p = 1$:

$$a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$$

$p = 2$:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{a_{11}\, dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + a_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 \\
&\qquad + a_{21}\, dx_2 \wedge dx_1 + \underbrace{a_{22}\, dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + a_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 \\
&\qquad + a_{31}\, dx_3 \wedge dx_1 + a_{32}\, dx_3 \wedge dx_2 + \underbrace{a_{33}\, dx_3 \wedge dx_3}_{} = 0 \\
&\qquad = (a_{12} - a_{21})\, dx_1 \wedge dx_2 + (a_{13} - a_{31})\, dx_1 \wedge dx_3 + (a_{23} - a_{32})\, dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

$p = 3$:

$$a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

11.4.7 Beweis des Darstellungssatzes (11.4.5)

$$
\begin{aligned}
\omega(x,h^1,\dots,h^p) &= \omega\left(x,\sum_{i_1=1}^n h^1_{i_1}e^{i_1},\dots,\sum_{i_p=1}^n h^p_{i_p}e^{i_p}\right) = \sum_{i_1=1}^n \omega\left(x,e^{i_1},\dots,\sum_{i_p=1}^n h^p_{i_p}e^{i_p}\right)h^1_{i_1}\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^n \omega(x,e^{i_1},e^{i_2},\dots,e^{i_p})h^1_{i_1}\dots h^p_{i_p}\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^n a_{i_1\dots i_p}(x)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}(e^{i_1},\dots,e^{i_p})h^1_{i_1}\dots h^p_{i_p}\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^n a_{i_1\dots i_p}(x)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}(h^1,\dots,h^p)
\end{aligned}
$$

ordnen:

$$
= \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} b_{i_1\dots i_p}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}
$$

11.4.8 Definition: Ableitung von p-Formen

Eine p-Form $(*)$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn alle $a_{i_1\dots i_p}\in C^k(U)$ sind. Für $p=0$, $\omega=a(x)$ heißt

$$
d\omega := \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu}\,dx_\nu
$$

äußere Ableitung von ω,
und für $p\geq 1$,

$$
\omega = a(x)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}
$$

ist

$$
d\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p}(da_{i_1\dots i_p})\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(x)\,dx_\nu\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}.
$$

$d\omega$ ist eine $(p+1)$-Form.

11.4.9 Multiplikation von Formen

$$
dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge(dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}) := dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_q}
$$

Damit ist auch für p-Form ω und q-Form σ $(d\omega)\wedge(d\sigma)$ erklärt.

11.4.10 Regeln zur Differenzierung von Formen

(1) Seien ω_1 und ω_2 p-Formen:

$$
d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2
$$

(2) Sei a eine 0-Form und ω eine p-Form:

$$d(a\omega) = (da) \wedge \omega + a(d\omega)$$

(3) Sei ω_1 eine p-Form und ω_2 eine q-Form:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d(\omega_2)$$

Beweis: Aufgabe

11.4.11 Beispiele

(a) $p = 0$:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= a(x) \\ da(h) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} dx_\nu(h) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} h_\nu = (\operatorname{grad} a) \cdot h \end{aligned}$$

(b) $a(x) = x_\nu$:

$$da = dx_\nu$$

(c)

$$\begin{aligned} \omega = \quad & a_1\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ & - a_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots \\ & + (-1)^{n+1} a_n\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - \cdots + \cdots \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\operatorname{div} a) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(d) $n = 3$:

$$\omega = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$$

$$\begin{aligned}
d\omega = \; & \underbrace{\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_1 \\
& + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2 + \underbrace{\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_2 \\
& + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_3 + \underbrace{\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\, dx_3 \wedge dx_3}_{=0} \\
= \; & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 \\
& + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 \\
& + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
\overset{\text{formal}}{=} & (\operatorname{rot} a) \cdot (dx_2 \wedge dx_3,\; dx_3 \wedge dx_1,\; dx_1 \wedge dx_2)
\end{aligned}$$

11.4.12 Satz

Für jede C^2-Form ω gilt:

$$d(d\omega) = 0$$

Beweis: In zwei Abschnitten:

1.) für $p = 0$,

2.) für $p \geq 1$.

zu 1.) Sei $p = 0$, $\omega = a(x)$:

$$\begin{aligned}
d(da) &= d\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}\, dx_\nu\right) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial a}{\partial x_\nu}\right) dx_\mu \wedge dx_\nu \\
&= \sum_{1 \leq \mu \leq \nu \leq n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right)}_{=0 \text{ (H. A. Schwarz)}} dx_\mu \wedge dx_\nu \\
&= 0
\end{aligned}$$

zu 2.)

$$\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = a\sigma$$

$$d\omega \overset{(2)}{=} (da) \wedge \sigma + a\,\underbrace{(d\sigma)}_{=0}$$

$$d(d\omega) \overset{(3)}{=} d(da) \wedge \sigma + (-1)^1\, da \wedge \underbrace{(d\sigma)}_{=0} = d(da) = 0,$$

denn es gilt

$$d\sigma = d(x_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = (d_1) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = 0$$

11.4.13 Bemerkungen

(a) $d(da) = 0 \iff$ Satz von Schwarz.

(b) Sei u eine C^1-Funktion, $n = 3$:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\, dx_3 = du$$

$$d\omega = d(du) = 0 \iff \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$$

(c)

$$\begin{aligned} \omega &= a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 \\ d\omega &= (\operatorname{rot} a) \cdot (dx_2 \wedge dx_3,\, dx_3 \wedge dx_1,\, dx_1 \wedge dx_2) \\ 0 = d(d\omega) &= (\operatorname{div}(\operatorname{rot} a))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} a = 0 \end{aligned}$$

11.4.14 Definition: Stammform, geschlossen

(a) Eine p-Form ω heißt *exakt*, wenn es eine $(p-1)$-Form α gibt mit $d\alpha = \omega$. α heißt dann *Stammform*.

(b) Eine stetig differenzierbare p-Form ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ ist.

11.4.15 Beispiele/Bemerkungen

(1) Ist ω exakt und C^1, so ist ω geschlossen.
Beweis:

$$\omega = d\alpha \implies d\omega = d(d\alpha) = 0$$

(2) Sei ω geschlossene 1-Form, U ein Sterngebiet und $\omega \in C^1$. Dann ist ω exakt.
Beweis: Sei

$$\omega = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \cdots + a_n\, dx_n$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in C^1(U)$.
ω geschlossen:

$$\Rightarrow d\omega = 0 = \sum_{1 \le \mu \le \nu \le n} \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu$$

also

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}$$

Daraus folgt (Analysis II):

$$(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{grad}(u)$$

mit $u \in C^2(U)$.
U: Nullform:

$$du = \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\partial u}_{a_\nu}\, dx_\nu = \omega$$

(3)
$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

ist geschlossen (Aufgabe).
ω ist in $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakt, sonst wäre

$$2\pi = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

für jede geschlossene Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(4) Wenn ω nicht geschlossen ist, aber $M(x)\omega$ geschlossen ist, dann heißt M integrierender Faktor.
$p = 1$**:** Sei

$$\begin{aligned} \omega &= a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n \\ M\omega &= Ma_1\,dx_1 + \cdots + Ma_n\,dx_n \end{aligned}$$

Sei nun $M\omega$ geschlossen:

$$\begin{aligned} &\iff \frac{\partial(Ma_\mu)}{\partial x_\nu} = \frac{\partial(Ma_\nu)}{\partial x_\mu} \\ &\iff X_{x_\nu}a_\mu + M\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} = M_{x_\mu}a_\nu + M\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} \end{aligned}$$

für $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, $\mu < \nu$.
Dies ist ein *System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.*
$n = 2$**:** Sei $\omega = a\,dx + b\,dy$:

$$\begin{aligned} M\omega \text{ ist geschlossen } &\iff (Ma)_y = (Mb)_x \\ &\iff M_y a + M a_y = M_x b + M b_x \\ &\iff aM_y - bM_x = (b_x - a_y)M \qquad (*) \end{aligned}$$

mit $M = M(x, y)$.
konkret: Sei

$$\omega = \underbrace{(2+xy)e^{xy}}_{=:a}\,dx + \underbrace{x^2e^{xy}}_{=:b}\,dy$$

Dann ist

$$\begin{aligned} a_y &= xe^{xy} + (2+xy)xe^{xy} = 3xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ b_x &= 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \end{aligned}$$

Es ist also $a_y \neq b_x$. Gesucht ist nun ein integrierender Faktor $M = M(x, y)$. Aus $(*)$ folgt die Bedingung für M:

$$(2+xy)e^{xy}M_y - x^2e^{xy}M_x \stackrel{!}{=} -xe^{xy}M$$

Ansatz: Der Multiplikator M ist hier von x abhängig:

$$M_x = \frac{1}{x}M$$

Eine Lösung ist $M = x$:

$$x\omega = (2x + y^2y)e^{xy}\,dx + x^3e^{xy}\,dy = d(x^2e^{xy})$$

ist exakt, also auch geschlossen.

11.4.16 Definition

Sei $p \geq 1$ und

$$\sigma_{i_1 i_2 \dots i_p} := \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

($\widetilde{dx_{i_\nu}}$ bedeutet: dx_{i_ν} ist auszulassen). $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ist eine $(p-1)$-Form. Ist

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

mit Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_p}$ im Sterngebiet U bzgl. 0 definiert, dann setzt man

$$I\omega := \sum_{i_1 \dots i_p} \left[\int_0^1 t^{p-1} a_{i_1 \dots i_p}(tx)\, dt \right] \cdot \sigma_{i_1 \dots i_p}.$$

11.4.17 Bemerkung

Ist ω geschlossen, dann ist $I\omega$ eine Stammform.

Beweis:

$$\alpha = I\omega$$
$$d\alpha = \omega - I(\underbrace{d\omega}_{=0}) = \omega$$

11.4.18 Hilfssatz

Sei ω eine p-Form, stetig differenzierbar im sternförmigen Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$I(d\omega) + d(I\omega) = \omega.$$

Beweis: Hier OBdA für $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$.
Für dieses ω ist

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

eine $(p+1)$-Form.
Es ist

$$I(d\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{((p+1)-1)} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(xt)\, dt \right] \sigma_{\nu,1,2,\dots,p}$$

$$I\omega = \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx)\, dt \right] \sigma_{1,2,\dots,p}$$

und

$$d(I\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{p-1} \cdot t \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx)\, dt \right] dx_\nu \wedge \sigma_{1,\dots,p} + \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx)\, dt \right] d\sigma_{1,\dots,p}$$

Die weitere Berechnung von $d(I\omega)$ wird nun aufgeteilt:

(a)

$$\begin{aligned} d\sigma_{1,\dots,p} &= \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \underbrace{\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu}}_{\substack{=0 \text{ für } \mu\neq\nu \\ =1 \text{ für } \mu=\nu}} dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_\nu} \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_\nu} \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \sum_{\nu=1}^{p} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p = p\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,\dots,p} = \sum_{\mu=1}^{p} (-1)^{\mu-1} x_\mu\, dx_\nu \wedge dx_1 \cdots \wedge \widetilde{dx_\mu} \wedge \dots \wedge dx_p.$$

(i) Für $1 \le \nu \le p$ gilt dann:

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,\dots,p} = x_\nu\, dx_1 \wedge \dots dx_p - \underbrace{\sigma_{\nu,1,2,\dots,p}}_{=0}$$

(ii) Und für $p < \nu \le n$ gilt:

$$\begin{aligned} dx_\nu \wedge \sigma_{1,\dots,p} = &- \Bigg[\sum_{\mu=1}^{p} (-1)^{\mu} x_\mu\, dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_\mu} \wedge \dots \wedge dx_p \\ &+ (-1)^0 x_\nu\, \widetilde{dx_\nu} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - x_\nu \widetilde{dx_\nu} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \Bigg] \\ = &- \sigma_{\nu,1,2,\dots,p} + x_\nu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \end{aligned}$$

Nach (i) und (ii) gilt also immer:

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,2,\dots,p} = x_\nu\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - \sigma_{\nu,1,2,\dots,p}$$

Aus (a) und (b) folgt dann:

$$\begin{aligned} I(d\omega) + d(I\omega) &= \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^p \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx)\, dt \right] x_\nu\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p + \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx)\, dt \right] \cdot p\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \left\{ \int_0^1 \underbrace{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \left(t^p \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx) x_\nu \right) + p t^{p-1} a(tx) \right] dt}_{\overset{!}{=} \frac{d}{dt}(t^p a(tx))} \right\} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \end{aligned}$$

$$= \underbrace{t^p a(tx)\Big|_0^1}_{=a(x)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = \omega$$

11.4.19 Lemma von Poincaré

Ist ω eine stetig differenzierbare und geschlossene p-Form in einem sternförmigen Gebiet U, so ist sie exakt, d. h. es gibt eine Stammform α. Alle Stammformen sind gegeben durch

$$\alpha = I\omega + d\eta,$$

wobei η eine beliebige zweimal stetig differenzierbare $(p-2)$-Form ist (im Fall $p = 1$ ist $d\eta$ durch eine Konstante zu ersetzen).

Beweis: Zeige, daß $\alpha = I\omega$ eine Stammform ist:

$$d\alpha = d(I\omega) = \omega - I(d\omega) = \omega$$

($d\omega = 0$, da ω nach Voraussetzung geschlossen ist.)
Seien nun α und α_1 Stammformen:

$$d(\alpha_1 - \alpha) = d\alpha_1 - d\alpha = \omega - \omega = 0$$

Das heißt, daß $\alpha_1 - \alpha$ geschlossen ist. Also hat $\alpha_1 - \alpha$ eine Stammform η, d. h. $\alpha_1 - \alpha = d\eta$. Daraus folgt: $\alpha_1 = \alpha + d\eta$, wobei η zweimal stetig differenzierbar ist.

Analysis II , Kapitel 9.5.6: Dort ist $p = 1$, $\omega = a_1(x)\,dx_1 + \cdots + a_n(x)\,dx_n$.
Sei $u \in C^1(U)$ Stammform von ω. Dann ist

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx_n$$

d. h. $\operatorname{grad} u = a = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\omega \text{ ist geschlossen} \iff \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

11.4.20 Beispiel

Sei $n = 3$ und $p = 2$. Gegeben sei ein C^1-Vektorfeld $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in U (U sei sternförmig bzgl. 0).

Gesucht ist ein Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ in $C^2(U)$ mit $\operatorname{rot} v = b$.

$$\omega = b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1 + b_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

ω geschlossen $\iff$ $\operatorname{div} b = 0$.
Damit ex. Stammform α von ω:

$$\alpha = v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3$$

Für die Stammfunktion α von ω gilt in dieser Schreibweise, daß $\operatorname{rot} v = b$ ist (früher mal gemacht).
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= x_3 \int_0^1 tb_2(tx)\,dt - x_2 \int_0^1 tb_3(tx)\,dt + u_{x_1}(x) \\ v_2(x) &= x_1 \int_0^1 tb_3(tx)\,dt - x_3 \int_0^1 tb_1(tx)\,dt + u_{x_2}(x) \\ v_3(x) &= x_2 \int_0^1 tb_1(tx)\,dt - x_1 \int_0^1 tb_2(tx)\,dt + u_{x_3}(x) \end{aligned}$$

11.4.21 Zurückholen von Differentialformen

Sei

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(x)\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \qquad (*)$$

eine p-Form in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon G \to D$ stetig differenzierbar in $G \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann erhält man die p-Form $\Phi^*\omega$ dadurch, indem man in $(*)$ dx_j ersetzt durch

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\,du_i$$

und x ersetzt durch $\Phi(u)$.

11.4.22 Beispiel

Für $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$: Sei

$$\omega = b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1$$

und

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

mit $D = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega =& b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [du_2 \wedge (du_1 - du_2)] \\ &+ b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [(du_1 - du_2) \wedge du_1] \\ =& (-b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) + b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2))\,du_1 \wedge du_2 \end{aligned}$$

11.4.23 Regeln

(a) Für die p-Formen ω_1 und ω_2 gilt:

$$\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*\omega_1 + \Phi^*\omega_2$$

(b) Für die 0-Form a und die p-Form ω gilt:

$$\Phi^*(a\omega) = (\Phi^* a)(\Phi^*\omega)$$

(c) Für die p-Form ω_1 und die q-Form ω_2 gilt:

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^*\omega_1) \wedge (\Phi^*\omega_2)$$

Beweis: Aufgabe

11.4.24 Satz

Ist Φ zweimal stetig differenzierbar, so gilt:

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$$

Beweis:

(1) Sei $\omega = a$ Nullform. Dann ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Daraus folgt:

$$\Phi^*(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(\Phi(u)) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\, du_i$$

Ausserdem ist

$$\Phi^*\omega = a(\Phi(u)).$$

Und damit ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} a(\Phi(u))\, du_i \overset{\otimes}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(\Phi(u)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\, du_i \\ &= \Phi^*(d\omega) \end{aligned}$$

Dabei wurde bei $\otimes$ die Kettenregel angewandt.

(2) Sei nun $\omega = dx_1$ (Der Beweis geht für $\omega = dx_j$ genauso).
Es ist

$$d\omega = d(dx_1) = 0$$

und damit

$$\Phi^*(d\omega) = 0.$$

Andererseits ist

$$\Phi^*\omega = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\, du_i$$

und damit

$$d(\Phi^*\omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_j \partial u_i}\, du_j \wedge du_i \overset{\oplus}{=} -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_i \partial u_j}\, du_i \wedge du_j$$

mit dem Satz von Schwarz und Vertauschung von du_i und du_j bei $\oplus$.
Also: $d(\Phi^*\omega) = 0$.

(3) Sei $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$. ($\omega = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ genauso)
Es ist

$$d\omega = 0 \qquad \Phi^*(d\omega) = 0$$

und

$$\Phi^*\omega = (\Phi^* dx_1) \wedge \cdots \wedge (\Phi^* dx_p).$$

Damit ist also

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (\Phi^* dx_1) \wedge \cdots \wedge \underbrace{d(\Phi^* dx_j)}_{=0 \text{ nach } (2)} \wedge \cdots \wedge (\Phi^* dx_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4) Sei $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ ($\omega = a(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ genauso).
Setze dabei $\sigma := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$.

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &\overset{(b)}{=} d((\Phi^* a)(\Phi^*\sigma)) = d(\Phi^* a) \wedge (\Phi^*\sigma) + (\Phi^* a)\, \underbrace{d(\Phi^*\sigma)}_{0 \text{ nach } (3)} \\ &\overset{(1)}{=} \Phi^*(da) \wedge (\Phi^*\sigma) \\ &\overset{(c)}{=} \Phi^*(da \wedge \sigma) = \Phi^*(d(a\sigma)) = \Phi^*(d\omega) \end{aligned}$$

(5) Sei nun

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(x) \sigma_{i_1 \ldots i_p} = \sum \omega_{i_1 \ldots i_p}$$

mit

$$\sigma_{i_1 \ldots i_p} = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d\left(\sum \Phi^*\omega_{i_1 \ldots i_p}\right) = \sum d(\Phi^*\omega_{i_1 \ldots i_p}) \\ &= \sum \Phi^*(d\omega_{i_1 \ldots i_p}) = \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

11.5 Flächen und Mannigfaltigkeiten

11.5.1 Definition: p-Flächenstück

Eine Abbildung $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung eines p-Flächenstückes $\mathcal{F}$, $(1 \le p \le n)$, wenn gilt:

(1) $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ist ein konvexes Gebiet. (d. h. mit $a, b \in D$ ist auch $\{a + t(b-a)\colon 0 \le t \le 1\} \subseteq D$).

(2) Φ ist injektiv, $\mathcal{F} = \Phi(D)$, $\Phi^{-1}\colon \mathcal{F} \to D$ ist stetig.

(3) Φ ist stetig differenzierbar, $\operatorname{rg} \Phi' = p$ in D (Φ' ist $n \times p$-Matrix).

11.5.2 Beispiel

für $n = 3$, $p = 2$: Sei

$$D = \{(u,v)\colon u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

Prüfe nach, daß

$$\mathcal{F} = \big\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^1 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 > 0\big\}$$

die Fläche der oberen Halbkugel ist.
Φ^{-1} ist stetig (einfach nachrechnen):

$$x_1 = \frac{2}{1+u^2+v^2}u \qquad x_2 = \frac{2}{1+u^2+v^2}v$$
$$u = \varrho x_1 \qquad v = \varrho x_2$$

Aus

$$x_3 = \frac{1-\varrho^2(x_1^2+x_2^2)}{1+\varrho^2(x_1^2+x_2^2)}$$

folgt:

$$\varrho^2(1+x_3)(x_1^2+x_2^2) = 1 - x_3$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = (1-x_3)(1+x_3)$$
$$\varrho^2(1+x_3)^2 = 1 \qquad \varrho = \frac{1}{1+x_3}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x_3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist stetig.

11.5.3 Definition: Verträglichkeit von Flächenstücken

Zwei p-Flächenstücke $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ heißen *verträglich*, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ein p-Flächenstück $\mathcal{F}_3$ gibt mit $x \in \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

11.5.4 Bemerkungen

(a) Gilt $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, dann sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich.

(b) Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich, $x_0 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $x_0 = \Phi(u_0) = \Psi(s_0)$, dann ist

$$h := \Psi^{-1} \circ \Phi$$

in einer Umgebung von u_0 erklärt und stetig differenzierbar.
Dasselbe gilt für

$$h^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi$$

genauso, d.h. h ist ein Diffeomorphismus, $\Phi = \Psi \circ h$ und $\Psi = \Phi \circ h^{-1}$.

(c) Sind Φ, Ψ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$, so gilt $\Phi = \Psi \circ h$ mit einem Diffeomorphismus $h\colon D \to G$.

Beweis für (b):
Da $\operatorname{rg} \Phi'(s_0) = p$ ist, existieren $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ mit:
Für

$$\overline{\Psi} := \begin{pmatrix} \Psi_{i_1} \\ \vdots \\ \Psi_{i_p} \end{pmatrix}$$

ist $\det \overline{\Psi}'(s_0) \neq 0$.
$\overline{\Psi}$ hat eine Umkehrfunktion in einer Umgebung von $\overline{\Psi}(s_0)$,
$\overline{\Psi}$ und $\overline{\Psi}^{-1}$ sind stetig differenzierbar.
Setze in einer Umgebung von u_0

$$h := \Psi^{-1} \circ \Phi = \underbrace{\overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Psi}}_{\in C^1}$$

mit $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{i_1} \\ \vdots \\ \Psi_{i_p} \end{pmatrix}$.
Für h^{-1} wird genauso verfahren.

11.5.5 Definition: Tangentialraum

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück mit Parameterdarstellung $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$, $x \in \mathcal{F}$ und $x = \Phi(u)$.
Dann heißt der von $\Phi_{u_1}, \Phi_{u_2}, \ldots, \Phi_{u_p}$ aufgespannte Vektorraum *Tangentialraum* im Punkt x. Geschrieben: $T_x\mathcal{F}$.
Es ist $T_x\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim T_x\mathcal{F} = p$.
Für $n = 3$ und $p = 2$ ist $T_x\mathcal{F}$ die in den Nullpunkt verschobene Tangentialebene.

11.5.6 Bemerkungen

(a) Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich und ist $x \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, so ist $T_x\mathcal{F}_1 = T_x\mathcal{F}_2$.

(b) $T_x\mathcal{F}$ hängt nicht von der Parameterdarstellung ab.

Beweis

(a) Seien Φ, Ψ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.
Dann ist lokal $\Phi = \Psi \circ h$, $\det h' \neq 0$. Damit ist

$$\Phi' = (\Psi' \circ h) \cdot h'$$

Φ_{u_i} ist Linearkombination von $\Psi_{s_1}, \ldots, \Psi_{s_p}$.
Ψ_{s_i} ist Linearkombination von $\Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_p}$.

(b) entspricht (a) mit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

11.5.7 Definition: gleichorientierte Flächenstücke

Zwei verträgliche Flächenstücke heißen *gleichorientiert*, wenn in $\Phi = \Psi \circ h$ (lokal) $\det h' > 0$ ist. Andernfalls heißen sie *entgegengesetzt-orientiert*.

11.5.8 Definition

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück, $\mathcal{F} \subseteq U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine p-Form in U. Dann definiert man

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \omega := \int\limits_{D} \omega\left(\Phi(u), \Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_p}(u)\right)\, du,$$

falls die rechte Seite als Lebesgue-Integral existiert.

11.5.9 Beispiele

(a) Für $p = 1$, $n \geq 2$:
Sei $\mathcal{F}$ definiert durch $\Phi\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, Kurve im $\mathbb{R}^n$ und

$$\omega = a_1(x)\, dx_1 + \cdots + a_n(x)\, dx_n$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{F}} \omega &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(a_1(\Phi(u))\Phi_1'(u) + \cdots + a_n(\Phi(u))\Phi_n'(u)\right)\, du \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}} a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \qquad \text{„Kurvenintegral“}\end{aligned}$$

(b) Für $n = 3$, $p = 2$:

Sei $\mathcal{F}$ definiert durch $\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, und

$$\omega = b_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{F}} &= \int\limits_D \left[b_1(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} + \cdots \right] du \\
&= \int\limits_D b(\Phi(u)) \cdot (\Phi_{u_1}(u) \times \Phi_{u_2}(u))\, du \\
&= \int\limits_D b(\Phi(u)) \cdot \underbrace{\frac{\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}}{\|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|}}_{\substack{\text{Normalenvektor} \\ \nu(x),\, x=\Phi(u)}} \|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|\, du \\
&= \int\limits_D b(x) \cdot \nu(x)\, do
\end{aligned}$$

11.5.10 Satz

Die Definition von $\int\limits_{\mathcal{F}} \omega$ ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung, d.h.:
Sind $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ zwei Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$ und ist $\Phi = \Psi \circ h$ mit einem Diffeomorphismus $h\colon D \to G$ mit $\det h' > 0$, so gilt:

$$\int\limits_D \underbrace{\omega\left(\Phi(u), \Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_p}\right)}_{=:f(u)} du = \int\limits_g \underbrace{\omega\left(\Psi(s), \Psi_{s_1}, \ldots, \Psi_{s_p}\right)}_{=:g(s)} ds$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int\limits_G g(s)\, ds &= \int\limits_D g(h(u)) \cdot |\det h'(u)|\, du \\
&= \int\limits_D \underbrace{g(h(u)) \cdot \underbrace{\det h'(u)}_{>0}}_{f(u)} du = \int\limits_D f(u)\, du
\end{aligned}$$

11.5.11 Bemerkung

Die p-Form $\Phi^*\omega$ ist definiert in $D \subseteq \mathbb{R}^p$, also von der Form

$$f(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p.$$

D ist eine p-Fläche in $\mathbb{R}^p$ mit der Parameterdarstellung $\mathrm{id}\colon D \to D$ (Identität)

$$\int\limits_D \Phi^*\omega = \int\limits_D f(u)\, du$$

also

$$\int\limits_D f(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p = \int\limits_D f(u)\, du$$

11.5.12 Definition: Flächenstück mit Rand

Sei $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung eines p-Flächenstückes und sei

$$H = \{u \in \mathbb{R}^p \colon u_1 < \alpha\}$$

ein Halbraum mit $D \cap H \neq \emptyset$, $D \not\subseteq H$.
Dann heißt $\mathcal{F}$ mit der Parameterdarstellung $\Phi\Big|_{D\cap H}$ *p-Flächenstück mit Rand.*
$\partial\mathcal{F} = \Phi(D \cap \partial H)$, $\partial H = \{u\colon u_1 = \alpha\}$
$\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F}$ heißt *Flächenstück mit Rand.*
Beachte: $\partial\mathcal{F}$ ist *nicht* der topologische Rand, und $\overline{\mathcal{F}}$ ist *nicht unbedingt* der topologische Abschluß.

11.5.13 Bemerkung

Das Urbild von $\partial\mathcal{F}$ in D,

$$\triangle = \{(u_2, \ldots, u_p)\colon (\alpha, u_2, \ldots, u_p) \in D\}$$

ist ein *konvexes Gebiet* im $\mathbb{R}^{p-1}$.

$$(u_2, \ldots, u_p) \longmapsto \Phi(\alpha, u_2, \ldots, u_p)$$

ist eine Parameterdarstellung von $\partial\mathcal{F}$. $\partial\mathcal{F}$ ist $(p-1)$-Fläche (für $p \geq 2$).

11.5.14 Beispiele

(1) Anschaulich z. B. die Nordhemisphäre mit dem Äquator.

(2) Sei

$$\mathcal{F} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 > 0, x_3 > 0\right\}.$$

Suche Parameterdarstellung für

$$\partial\overline{\mathcal{F}} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\, x_1 > 0\right\}.$$

Eine Parameterdarstellung für eine größere Fläche ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$$

mit $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$ und $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ (rechte Halbsphäre).
Setze

$$D = \{(\beta, \lambda)\colon -\pi/2 < \lambda, \beta < \pi/2\}$$

und

$$H = \{(\beta, \lambda)\colon \beta < 0\}$$

(3) Für $n = 3$ und $p = 3$:
Sei

$$\mathcal{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$$

der positive Kugel-Oktant im $\mathbb{R}^3$ und

$$\partial\mathcal{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$$

die dazugehörige Kugelabschnittsfläche.
Setze dazu

$$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\beta\cos\lambda \\ r\cos\beta\sin\lambda \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

für $0 < r < 1$, $0 < \lambda < \pi/2$ und $0 < \beta < \pi/2$. Für die große Fläche sei $0 < r < 2$.

$$\partial\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

für $0 < \lambda < \pi/2$ un4 $0 < \beta < \pi/2$.
Setze also für $D : 0 < r < 2$, $0 < \lambda < \pi/2$ und $0 < \beta < \pi/2$ und

$$H = \{(r, \beta, \lambda)\colon r < 1\}$$

11.5.15 Definition: p-Mannigfaltigkeit, p-Fläche

Sind $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ verträgliche und orientierte p-Flächenstücke [mit Rand], so heißt

$$M = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m$$

orientierte p-Mannigfaltigkeit [mit Rand, falls $\partial\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ für $i \neq j$].
Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist, so heißt M *orientierte p-Fläche*.

11.5.16 Beispiel

$$S^{n-1} = \{x\colon \|x\| = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-Fläche.

11.5.17 Bemerkung

$$\partial M := \partial\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \partial\mathcal{F}_m$$

ist eine $(p-1)$-Mannigfaltigkeit.

Beweis Sei $\mathcal{F}_j \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ mit der Parameterdarstellung $\Phi_j\colon D_j \mapsto \tilde{\mathcal{F}}_j$.
Für $\mathcal{F}_j$ ist $\Phi_j\colon D_j \cap H \mapsto \mathcal{F}_j$ Parameterdarstellung mit $H = \{x\colon x_1 < 0\}$ und für $\partial\mathcal{F}_j$ ist $\Psi_j\colon \triangle_j \mapsto \partial\mathcal{F}_j$ Parameterdarstellung.
Dabei ist

$$\triangle_j = \{(u_2, \ldots, u_p)\colon (0, u_2, \ldots, u_p) \in D_j\},$$

also

$$\Psi(u_2, \ldots, u_p) = \Phi_j(0, u_2, \ldots, u_p).$$

Wir haben bisher:
$\Phi_1 = \Phi_2 \circ h$ mit $h\colon D_1 \mapsto D_2$ lokal diffeomorph.
Damit ist lokal $h(\triangle_1) \subseteq \triangle_2$, weil $h = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$.
Es ist also

$$\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \Phi_2(h_1(u_1, \ldots, u_p), h_2(u_1, \ldots, u_p), \ldots, h_p(u_1, \ldots, u_p)).$$

Mit $u_1 = 0$ ist

$$\begin{aligned}\Psi_1(u_2,\dots,u_p) &= \Phi_2(0, h_2(0,u_2,\dots,u_p),\dots,h_p(0,u_2,\dots,u_p))\\ &= \Psi_2(\overline{h}(u_2,\dots,u_p))\end{aligned}$$

mit $\overline{h} = \begin{pmatrix} h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \partial\mathcal{F}_1$, $\partial\mathcal{F}_2$ sind verträglich.
Noch zu zeigen:

$$\det h' > 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \det \overline{h}' > 0.$$

Es ist

$$h' = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & & & \\ \vdots & & \overline{h}' & \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & & & \end{pmatrix}$$

Dabei ist in $\triangle_1$

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial h_1}{\partial u_p} = 0.$$

Also gilt dann:

$$0 < \det h' = \frac{\partial h_1}{\partial u_1} \cdot \overline{h}'.$$

Ist $\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$? Dann ist nämlich $\det \overline{h}' > 0$.
Zeige also noch: $\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$:
Es ist $h_1(0,u_2,\dots,u_p) = 0$,
$\overline{h}(\triangle_1) \subseteq \triangle_2$ und $h(D_1 \cap H) \subseteq D_2 \cap H$.
$\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$, weil $h_1(u_1,u_2,\dots,u_p) < 0$ für $u_1 < 0$.

11.5.18 Zerlegung der Eins

Sei M eine kompakte p-Mannigfaltigkeit,

$$M = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m, \quad \partial M = \partial\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \partial\mathcal{F}_m.$$

Dabei sei

$$\overline{M} := M \cup \partial M \subseteq \mathbb{R}^n$$

kompakt.
Dann existieren endlich viele Kugeln $K_1,\dots,K_s$ mit dazu gehörenden C^∞-Funktionen $\varphi_j\colon K_1 \cup \cdots \cup K_s \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_j(x) = 0$ außerhalb von K_j und $\varphi_j > 0$ in K_j und

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j(x) = 1$$

für $x \in K_1 \cup \cdots \cup K_s$.
Weiter ist $\overline{M} \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_s$ und zu jedem $x \in \overline{M}$, $x \in K_j$, gibt es ein $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ mit $\overline{M} \cap K_j \subseteq \overline{\mathcal{F}_{\nu(j)}}$.

Geometrisch bedeutet das, daß es nicht erlaubt ist, daß der Schnitt von $\overline{M}$ mit K_j eine Untermenge irgendeines $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ sein muß; es darf kein $\mathcal{F}_{\nu(k)}$ zusätzlich in K_j $(\nu(k) \neq \nu(j))$ „hineinragen".
$\mathcal{F}_{\nu(j)}$ darf aber z. B. (unter der Annahme, daß $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ eine Kurve ist) zeitweise die Kugel K_j verlassen und danach wieder schneiden.

Beweis: Sei $x \in \overline{M}$ beliebig.
Dazu existiert eine Kugel $K(x)$ und ein ν mit $K(x) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_\nu$.
Da $\overline{M} \subseteq \bigcup_{x\in\overline{M}} K(x)$, gilt:

$$\overline{M} \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} K\left(x^{(j)}\right) =: \bigcup_{j=1}^{s} K_j$$

(Satz von Heine-Borel, 7.5.11 auf Seite 197)
Dabei ist $K_j \subseteq \overline{\mathcal{F}_{\nu(j)}}$ für geeignetes $\nu(j)$.
Wenn nun $\psi \in C^\infty$ ex. mit:

1. $\psi_j(x) > 0$ in K_j,
2. $\psi(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus K_j$,

dann setze in $K_1 \cup \cdots \cup K_s$

$$\varphi_j(x) := \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{i=1}^{s} \psi_i(x)}$$

Nachweis der Existenz von ψ zu K: Setze $K = K(0,1)$ und

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{in } K(0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\psi \in C^\infty$ (Aufgabe).
Zu $K = K(\xi, r)$ gehört dann $\psi\left(\frac{x-\xi}{r}\right)$.

11.5.19 Def.: Integral von p-Form über p-Mannigfaltigkeit

Sei M eine kompakte, orientierte p-Mannigfaltigkeit, ω sei eine p-Form, definiert in der offenen Menge U, $U \supseteq \overline{M}$.
$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ sei eine Zerlegung der Eins.
Dann wird definiert:

$$\int\limits_M \omega := \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

11.5.20 Satz

Die Definition in 11.5.19 ist unabhängig von der Zerlegung der Eins.

Beweis: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ mit $K_1, \dots, K_s$ und $\psi_1, \dots, \psi_t$ mit $L_1, \dots, L_t$ eine Zerlegung der Eins:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s} \int\limits_{F_{\nu(j)}} \varphi_j \omega &= \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \sum_{i=1}^{t} \psi_i \varphi_j \omega = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{t} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \psi_i \varphi_j \omega \\ &\overset{\otimes}{=} \sum_{i=1}^{t} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(i)}} \sum_{j=1}^{s} \varphi_j \psi_i \omega = \sum_{i=1}^{t} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(i)}} \psi_i \omega\end{aligned}$$

Wieso gilt $\otimes$?
Zu $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ und $\mathcal{F}_{\nu(i)}$ gehören die beiden Kugeln K_j und L_i, sie können sich schneiden, müssen es aber nicht, außerdem ist $\psi_i \varphi_j = 0$ außerhalb von $K_j \cap L_i$, deshalb ist es egal über welches $\mathcal{F}$ — beide sind Obermengen der Kugeln — integriert wird.

11.6 Der Integralsatz von Stokes

11.6.1 Integralsatz von Stokes

Sei M ein C^2-Mannigfaltigkeit der Dimension p (p-Mannigfaltigkeit), ω eine $(p-1)$-Form, stetig differenzierbar in $U \supseteq M$, U offen.
Dann gilt:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

Speziell für $p = n$ ist dies der Gaußsche Integralsatz (Divergenzsatz):

$$\begin{aligned}\int\limits_M \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \right) \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}_{(dx)} = \int\limits_{\partial M} & b_1(x)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ & - b_2\, dx_1 \wedge dx_4 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ & + \cdots + (-1)^{n+1} b_n(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\end{aligned}$$

11.6.2 Bemerkungen

(a) „C^2"-Mannigfaltigkeit:

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j, \qquad \Phi_j \colon D_j \to \mathcal{F}_j$$

alle Φ_j sind zweimal stetig differenzierbar.

(b) $\partial M = \emptyset$ ist möglich. Dann ist die Aussage:

$$\int\limits_M d\omega = 0$$

(c) Für $p = 1$ ist M eine Kurve (Bogen oder geschlossen).

$$\Phi \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$

sei Parameterdarstellung von M.
Wenn M geschlossen ist, hat M keinen Rand, wenn M ein Bogen ist, sind die Endpunkte der Rand.
ω sei eine 0-Form: $\omega = u\colon U \to \mathbb{R}$, eine Funktion. Dann ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Was ist

$$\int_{\partial M} \omega = \cdots ?$$

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_M \operatorname{grad} u(x) \cdot dx \qquad \text{„Kurvenintegral"} \\ &= u(\Phi(\beta)) - u(\Phi(\alpha)) =: \int_{\partial M} \omega\end{aligned}$$

11.6.3 Beweis zum Integralsatz von Stokes, 11.6.1

Sei

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j \qquad \text{(mit oder ohne Rand)}$$

und $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ Zerlegung der Eins.
Dann ist

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{j=1}^{s} \varphi_j \omega\right) \\ &= \sum_{j=1}^{s} \int_M d(\varphi_j \omega) = \sum_{j=1}^{s} \int_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} d(\varphi_j \omega)\end{aligned}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ ist auch Zerlegung der Eins bezüglich $\partial B \subseteq \overline{M}$:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \left(\sum_{j=1}^{s} \varphi_j \omega\right) = \sum_{j=1}^{s} \int_{\partial \mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

Zeige also:

$$\int_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} d(\varphi_j \omega) = \int_{\partial \mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

Schreibe $\mathcal{F}$ anstelle von $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ und ω anstelle von $\varphi_j \omega$.
Dann ist zu zeigen:

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{F}} \omega$$

Dabei ist $\omega = 0$ außerhalb einer Kugel.
Sei

$$\Phi\colon D \cap H \to \mathcal{F}, \qquad H = \{u\colon u_1 < 0\}\,(\text{z.B.})$$

eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$ mit $\Phi \in C^2(D)$.
Setze nun $\sigma := \Phi^*\omega$ und damit $d\sigma = \Phi^*(d\omega)$.
Damit ist dann

$$\int\limits_{\mathcal{F}} d\omega = \int\limits_{D\cap H} d\sigma$$

und

$$\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \omega = \int\limits_{\triangle} \sigma$$

mit $\triangle = \partial H \cap D$.
σ ist $(p-1)$-Form im $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned}\sigma =& b_1\,du_2 \wedge \cdots \wedge du_p - b_2\,du_1 \wedge du_3 \wedge \cdots \wedge du_p \\ &+ \cdots + (-1)^{p-1} b_p\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} \\ d\sigma =& \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial b_j}{\partial u_j}\right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_p\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also:

$$\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_j}{\partial u_j}\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_p = (-1)^{j-1} \int\limits_{\triangle} b_j\,du_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{du_j} \wedge \cdots \wedge du_p$$

Der Fall $\mathbf{j = 1}$: Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_p &= \int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\,du \\ &= \int\limits_{\triangle} \left[\int\limits_{\alpha(\overline{u})}^{0} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\,du_1\right] d\overline{u} \\ &= \int\limits_{\triangle} (b_1(0,\overline{u}) - \underbrace{b_1(\alpha(\overline{u}),\overline{u})}_{=0})\,d\overline{u} \\ &= \int\limits_{\triangle} b_1(0,\overline{u})\,d\overline{u} = \int\limits_{\triangle} b_1\,du_2 \wedge du_3 \wedge \cdots \wedge du_p\end{aligned}$$

Der Fall $\mathbf{2 \le j \le p}$: Sei z. B. $j = p$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_p}{\partial u_p}\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_p &= \left|\begin{matrix}\text{Fubini} \\ \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}\end{matrix}\right| \\ &= \int \left(\int\limits_{\alpha(\tilde{u})}^{\beta(\tilde{u})} \frac{\partial b_p}{\partial u_p}\,du_p\right) d\tilde{u} = 0\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\triangle} b_p\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} = \int\limits_{\triangle} b_p(0, u_2, \ldots, u_p)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} = 0$$

(Aufgabe!)

11.7 Oberflächenmaße

11.7.1 Definition: Gram'sche Matrix und Determinante

Sei A eine $n \times p$-Matrix, $1 \leq p \leq n$.
Dann heißt

$$A^T A$$

Gram'sche Matrix, $(p \times p)$-Matrix, und

$$\operatorname{gr}(A) := \det(A^T A)$$

heißt *Gram'sche Determinante.*

11.7.2 Bemerkungen/Beispiele

(a) Ist a^i die i-te Spalte von A ($a_i \in \mathbb{R}^n$), dann hat $A^T A$ die Einträge $a^j \cdot a^i = g_{ji} = g_{ij}$, $A^T A$ ist symmetrisch.

(b) Sei $p = 2$, A habe die 2 Spalten a und b:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ a \cdot b & b \cdot b \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{gr}(A) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 \overset{\text{CSU}}{\geq} 0$$

(c) Für $n = 3$, $p = 2$ ist $\operatorname{gr}(A) = \|a \times b\|^2$ (Aufgabe!)

(d) Sei $c \in \mathbb{R}^n$ fest und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix}, \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & c_1 c_2 & \ldots & c_1 c_n \\ c_2 c_1 & 1 + c_2 12 & \ldots & c_2 c_n \\ & & \ddots & \\ c_n c_1 & \ldots & c_n c_{n-1} & 1 + c_n^2 \end{pmatrix}$$

Es ist dann:

$$\operatorname{gr}(A) = 1 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1 + \|c\|^2$$

Beweis zu (d): Berechnung der Eigenwerte von $A^T A$:
1 ist Eigenwert:

$$\begin{aligned} A^T A x = 1 \cdot x &\iff \sum_{j=1}^{n} c_i c_j x_j = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ &\iff c_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 \\ &\iff c_i (c \cdot x) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Dies ist richtig, wenn $c \cdot x = 0$ ist.
Es gibt $(n-1)$ linear unabhängige Lösungen von $c \cdot x = 0$.
Es gibt also die Eigenwerte $\underbrace{1, \dots, 1}_{(n-1)\times}$ und den Eigenwert

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{spur}(A^T A) - (\overbrace{1 + \dots + 1}^{(n-1)\times}) \\ &= (1 + c_1^2 + \dots + 1 + c_n^2) - (1 + \dots + 1) \\ &= 1 + c_1^2 + \dots + c_n^2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\det(A^T A) = \underbrace{1 \cdots 1}_{(n-1)\times}(1 + c_1^2 + \dots + c_n^2)$$

11.7.3 Hilfssatz

(a) Es gilt: $\operatorname{gr}(A) \geq 0$. Es ist $\operatorname{gr}(A) = 0$ genau dann, wenn $a^1, a^2, \dots, a^p$ linear abhängig sind.

(b) Für eine $(p \times p)$-Matrix C gilt:

$$\operatorname{gr}(AC) = (\det C)^2 \cdot \operatorname{gr}(A)$$

Beweis

(a) mit Induktion:
$\mathbf{p = n}$: $\operatorname{gr}(A) = (\det A)^2 \geq 0, = 0$ genau dann, wenn $a^1, \dots, a^n$ l. a.
$\mathbf{p + 1 \mapsto p}$: Sei $A = (a^1, \dots, a^p)$. Wähle $a \in \mathbb{R}^n$ so, daß $\|a\| = 1$ und $a \cdot a^i = 0$ für alle i. Setze $A' = (a^1, \dots, a^p, a)$:

$$0 \leq \operatorname{gr}(A') = \det\left((A')^T A'\right) = \operatorname{gr}(A)$$

denn

$$\det\left(\begin{pmatrix} A^T \\ a^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & a \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A^T A & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{gr}(A)$$

Dieses ist $= 0$, wenn $a^1, \dots, a^p, a$ linear abhängig sind. Da aber a senkrecht zu allen anderen Vektoren steht müssen $a^1, \dots, a^p$ l. a. sein.

11.7.4 Definition: Oberflächenintegral

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\Phi \colon D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ und $f \colon \Phi(D) = \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} f(x)\, do := \int_D f(\Phi(u)) \sqrt{\operatorname{gr}(\Phi'(u))}\, du$$

Oberflächenintegral, sofern die rechte Seite als Lebesgueintegral existiert. Insbesondere heißt

$$|\mathcal{F}| = \int_{\mathcal{F}} 1 \cdot do = \int_{\mathcal{F}} do$$

p-dimensionaler Inhalt von $\mathcal{F}$.

11.7.5 Bemerkungen

(a) $\int\limits_{\mathcal{F}} f(x)\,do$ läßt sich mittels einer Zerlegung der Eins für Flächen bzw. Mannigfaltigkeiten erklären.

(b) Für $n = 3$, $p = 2$:
Sei $\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: dann ist
$$\operatorname{gr}(\Phi') = \|\Phi_u \times \Phi_v\|^2$$
(Übereinstimmung mit früherer Definition.)

(c) Sei nun n beliebig, $p = 1$ und
$$\Phi\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$
eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$ mit
$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \vdots \\ \Phi_n' \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{gr}(\Phi') = \det((\Phi')^T \cdot \Phi') = \|\Phi'\|^2$$
Damit ist
$$\int\limits_{\mathcal{F}} f(x)\,do = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t)) \cdot \|\phi'(t)\|\,dt$$
(Integral nach der Bogenlänge)

(d) Die Definition ist unabhängig von der Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$:
Seien $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon \triangle \to \mathcal{F}$ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$.
Es gilt: $\Phi(u) = \Psi(h(u))$, mit $h :: D \to \triangle$ diffeomorph.
Damit ist dann
$$\begin{aligned} \Phi'(u) &= \Psi'(h(u)) \cdot h'(u) \\ \operatorname{gr}(\Phi'(u)) &= \operatorname{gr}(\Psi'(h(u)) \cdot h'(u)) \\ &= \operatorname{gr}(\Psi'(h(u))) \cdot (\det h'(u))^2 \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} \int\limits_{D} f(\Phi(u))\sqrt{\operatorname{gr}(\Phi'(u))}\,du &= \int\limits_{D} f(\Psi(h(u)))\sqrt{\operatorname{gr}(\Psi'(h(u)))} \cdot |\det h'(u)|\,du \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{\triangle} f(\Psi(s))\sqrt{\operatorname{gr}(\Psi'(s))}\,ds \end{aligned}$$

(e) Zur Motivation: Sei
$$D = \{u \in \mathbb{R}^p \colon 0 < u_j < 1 \text{ für } 1 \leq j \leq p\}$$
und $\Phi(u) = A \cdot u$ mit der $n \times p$-Matrix $A = (a^1, a^2, \ldots, a^p)$.
Damit ist $\Phi' = A$ und
$$\mathcal{F} = \Phi(D) = \left\{ \sum_{j=1}^{p} u_j a^j \colon 0 < u_j < 1 \text{ für } j = 1, \ldots, p \right\}$$
In der Geometrie des $\mathbb{R}^n$ setzt man dann
$$|\mathcal{F}| = \text{Inhalt von } \mathcal{F} = \sqrt{\operatorname{gr}(A)} = \int\limits_{D} \sqrt{\operatorname{gr}(A)}\,du$$
Im Fall $n = 3$, $p = 2$ ist dann $|\mathcal{F}|$ die Oberfläche des im Raum stehenden Flächenstückes $\mathcal{F}$.

11.7.6 Beispiel: Inhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre

Die n-dimensionale Einheitsspäre ist

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Suche eine explizite Darstellung für

$$S_+^{n-1} = X^{n-1} \cap \{x \colon x_n > 0\}$$

Es ist $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$, genauer:

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ \varphi(u) \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} u \in \mathbb{R}^{n-1},\ \|u\| < 1$$

Damit ist

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \varphi_{u_1} & \cdots & \varphi_{u_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{gr}(\Phi'(u)) = 1 + \|\varphi'\|^2$$

und

$$\triangle_{n-1} = \{u \colon \|u\| < 1,\ u \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Also ist

$$|S^{n-1}| = \omega_n = 2 \cdot |S_+^{n-1}| = 2 \int\limits_{\triangle_{n-1}} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \sqrt{1 - \|u\|^2} = \sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{n-1}^2} \\
\varphi'(u) &= -\frac{1}{2\sqrt{1 - \|u\|^2}} \cdot (-2u_1, -2u_2, \dots, -2u_{n-1}) \\
\|\varphi'\|^2 &= \frac{1}{1 - \|u\|^2} \|u\|^2 \\
1 + \|\varphi'\| &= \frac{1}{1 - \|u\|^2}
\end{aligned}$$

1. Sei nun $n = 2$:

$$\omega_2 = 2 \cdot \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\pi$$

2. und nun $n \mapsto n + 1$:

$$\omega_{n+1} = 2 \cdot \int\limits_{\triangle_n} \frac{dx}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{mit} \\ y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ r = x_n \in \mathbb{R} \\ -1 < r < 1 \\ \|y\|^2 < 1 - r^2 \\ \text{und Fubini} \end{array} \right|$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\|y\|<\sqrt{1-r^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-r^2-\|y\|^2}}\, dr = \left| \begin{array}{c} \text{Transformation:} \\ y = \sqrt{1-r^2}\xi \\ dy = (1-r^2)^{(n-1)/2}\, d\xi \\ \|y\|^2 = (1-r^2)\|\xi\|^2 \end{array} \right|$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\int_{\triangle_{n-1}} \frac{(1-r^2)^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}\, d\xi \right) dr$$

$$= 2\int_{-1}^{1} (1-r^2)^{(n/2)-1}\, dr \int_{\triangle_{n-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}$$

Daraus folgt also:

$$\omega_{n+1} = \omega_n \cdot 2 \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1}\, dr$$

Wenn nun substituiert wird mit $r = \sin t$, $dr = \cos t\, dt$, dann gilt folgende Rekursionsformel:

$$\omega_{n+1} = \left[2 \int_0^{2\pi} (\cos t)^{n-1}\, dt \right] \cdot \omega_n$$

mit $\omega_2 = 2\pi$.

11.7.7 Gaußscher Integralsatz oder Divergenzsatz [klassische Form]

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ∂G sei der topologische Rand von G. G wird aufgefaßt als n-Fläche, ∂G als $(n-1)$-Mannigfaltigkeit.
Sei nun w ein Vektorfeld, stetig differenzierbar in einer offenen Menge $\supseteq \overline{G}$. Dann gilt:

$$\int_G \operatorname{div} w\, dx = \int_{\partial G} w \cdot \nu\, do$$

Dabei ist

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n},$$

ν ist die „äußere“ Normale: $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\|\nu\| = 1$, $\nu(x) \perp T_x \partial G$.
„äußere“ heißt: $x - t\nu(x) \in G$ für $0 < t < \delta$, „ν zeigt nach außen“.

Beweis (Idee): Mit Hilfe des Satzes von Stokes für $p = n$:
Für

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

wird

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega$$

auszurechnen sein.

12 Fourierreihen und -Transformationen[1]

12.1 L^p-Räume

12.1.1 Vorbemerkungen

Generell sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und

$$f\colon E \to \mathbb{C}, \qquad f = u + iv, \qquad u, v\colon E \to \mathbb{R}$$

f heißt meßbar [integrierbar], wenn u und v meßbar [integrierbar] sind.
Man setzt

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E u(x)\,dx + i\int_E v(x)\,dx$$

Es gelten die üblichen Regeln, insbesondere (wie bei Riemann):

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

12.1.2 Definition: Der L^p-Raum

(a) Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$L^p = L^p(E) := \{f\colon E \to \mathbb{C} \text{ meßbar}, |f|^p \text{ integrierbar}\}$$

(b)

$$L^\infty = L^\infty(E) := \left\{\begin{matrix} f\colon E \to \mathbb{C} \text{ meßbar, es ex. eine Nullmenge } N \text{ mit} \\ \sup\{|f(x)|\colon x \in E \setminus N\} < \infty \end{matrix}\right\}$$

Man setzt

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

und

$$\|f\|_\infty := \inf\{A > 0\colon |f(x)| \leq A \text{ in } E \setminus N,\ N \text{ Nullmenge}\}$$

12.1.3 Bemerkungen und Beispiele

(a) Für $m(E) < \infty$ und $p < q \leq \infty$ gilt: $L^q \subsetneqq L^p$
Beweis: Für $q = \infty$: Dann ist f und damit auch $|f|^p$ beschränkt, zusammen mit $m(E) < \infty$ folgt dann:

$$\int |f|^p \text{ existiert.}$$

[1] Version 4.5 vom 19. Dezember 2002

Sei nun $p < q < \infty$, $f \in L^q$: Es ist dann

$$\|f\|^p \leq 1 + \|f\|^q \text{ (Majorante).}$$

Daraus folgt: $f \in L^p$.

(b) **Beispiel:** Sei

$$E = \{x\colon \|x\| < 1\}, \qquad f(x) = \|x\|^{-\alpha} \text{ für } \alpha > 0.$$

Damit ist ($\otimes$: Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p \, dx &= \int_E \|x\|^{-\alpha p} \, dx \\ &\overset{\otimes}{=} \text{const} \cdot \int_0^1 r^{-\alpha p + n - 1} \, dr\end{aligned}$$

Dieses Integral existiert genau dann, wenn

$$-\alpha p + n - 1 > -1 \iff \alpha p < n$$

(c) Für $m(E) = +\infty$ existiert keine Relation zwischen L^p und L^q (siehe Beispiel unter (d)).

(d) **Beispiel:** Sei

$$E = \{x\colon \|x\| > 1\}, \qquad f(x) = \|x\|^{-\alpha}.$$

Damit ist

$$f \in L^p \iff \alpha p > n$$

12.1.4 Höldersche und Minkowskische Ungleichung

(a) Seien $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Konjugierte Zahlen).
Dann gilt für $f \in L^p$, $g \in L^q$:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{12.1}$$

(Höldersche Ungleichung)

(b) Für $f \in L^1$, $g \in L^\infty$ gilt (12.1) ebenfalls. ($p = 1$, $q = \infty$)

(c) Sei $f \in L^p$, $g \in L^p$ mit $1 \leq p \leq +\infty$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis:

(a) Die Gleichung (12.1) ist richtig, falls $f(x) \cdot g(x) = 0$ f. ü.,
sonst sei

$$\|f\|_p = A > 0, \qquad \|g\|_q = B > 0.$$

Setze

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{A}, \qquad G(x) = \frac{|g(x)|}{B}.$$

Sei x fest: Es ist $F(x) > 0$, $G(x) > 0$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{s/p}, \qquad (s = p \log F(x)) \\ G(x) &= e^{t/q}, \qquad (t = q \log G(x)) \end{aligned}$$

Mit $\oplus$ als Aufgabe gilt dann:

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= e^{s/p+t/q} \\ &\overset{\oplus}{\leq} \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t \\ &= \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q \end{aligned}$$

Zusammen ist dann

$$\int_E F(x)G(x)\,dx \leq \frac{1}{p}\underbrace{\int_E (F(x))^p\,dx}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\int_E (G(x))^q\,dx}_{=1} = 1$$

$$\iff \frac{1}{AB}\int_e |f(x)g(x)|\,dx \leq 1$$

$$\iff \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(b) Es ist

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty \text{ f. ü.}$$

also

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

(c) Beweis hier nur für $1 < p < \infty$. ($p = 1$, ∞ als Aufgabe.)
Wähle q so, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es ist

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = (|f|+|g|)(|f|+|g|)^{p-1}$$

$$\int \underbrace{|f|}_{\in L^p}\underbrace{(|f|+|g|)^{p-1}}_{\in L^q??} \leq \|f\|_p \cdot \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q$$

Hierbei ist

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = \left(\int (|f|+|g|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt $(p-1)q = p$. Damit ist dann

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = \left(\int (|f|+|g|)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Zusammen folgt:

$$\int (|f|+|g|)^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int (|f|+|g|)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Mit $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ folgt

$$\begin{aligned} &\|(|f| + |g|)\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \\ \Rightarrow \quad &\|f + g\|_p \leq \|\,|f| + |g|\,\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \end{aligned}$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen: Ist $(|f| + |g|)^{p-1} \in L^q$?

$$(|f| + |g|)^{(p-1)q} = (|f| + |g|)^p \leq 2^p \underbrace{\max(|f|^p, |g|^p)}_{\in L^1} \in L^1$$

12.1.5 Bemerkung

Für $p = 2$ ist in Gleichung (12.1) $q = 2$ und sie lautet dann

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$$\left| \int_E f(x)g(x)\,dx \right|^2 \leq \left(\int_E |f(x)g(x)|\,dx \right)^2 \leq \left(\int_E |f(x)|^2\,dx \right) \cdot \left(\int_E |g(x)|^2\,dx \right)$$

Dies ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*. Normalerweise wird sie auf der linken Seite mit $\overline{g(x)}$ statt $g(x)$ geschrieben.

12.1.6 Satz: L^p ist ein Vektorraum

L^p ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, und $\|.\|_p$ hat die Eigenschaften

(1) $\|f\|_p \geq 0$, „$= 0$“, genau dann, wenn $f(x) = 0$ f. ü.

(2) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

(3) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

12.1.7 Bemerkung

Wegen (1) ist $\|.\|_p$ *keine* Norm, heißt aber p-Norm oder L^p-Norm.

12.1.8 Definition: Konvergenz im L^p

Eine Folge (f_k) in L^p heißt *konvergent in* L^p gegen $f \in L^p$, wenn $\|f_k - f\|_p \to 0$ für $k \to \infty$.
kurz: $f_k \to f$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$.
Achtung: $f_k \to f$ ist etwas anderes als $f_k(x) \to f(x)$ für $x \in E$.

12.1.9 Satz von Riesz-Fischer

L^p ist vollständig, d. h. jede Cauchyfolge in L^p konvergiert in L^p.
(Cauchyfolge bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für alle $k > l \geq k_0$.)

Beweis: Bemerkung: Aus $f_k \to f$ in L^p folgt, daß (f_k) wie immer eine Cauchyfolge ist.
Sei (f_k) Cauchyfolge in L^p mit $1 \le p < \infty$ ($p = \infty$ als Aufgabe).
Setze nun $\varepsilon = 2^{-j}$. Finde dazu ein k_j mit

$$\|f_k - f_l\|_p < 2^{-j} \text{ für } k > l > k_j, \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

OBdA sei $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$.
Sei nun E meßbar und $F \subseteq E$ mit endlichem $m(F)$:

$$\begin{aligned}\int_F 1 \cdot |f_k(x) - f_l(x)|\, dx &\overset{\text{Hölder}}{\le} (m(F))^{1/q} \cdot \left(\int_F |f_k(x) - f_l(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\ &\le (m(F))^{1/q} \|f_k - f_l\|_p \\ &\le (m(F))^{1/q} \cdot 2^{-j}, \text{ falls } k > l \ge k_j\end{aligned}$$

Mit Beppo-Levi folgt dann:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\right)$$

konvergiert fast überall in F, also fast überall in

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{E \cap [-k, k]^n}_{=:F_k \text{ mit } m(F_k) < \infty}.$$

Setze nun

$$f(x) := f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\right) = \lim_{j \to \infty} f_{k_j}(x) \text{ f. ü.}$$

(sonst setze $f(x) = 0$.)
Da $\|f_k\|_p \le \text{const}$ (Wie bei jeder Cauchyfolge).
$f \in L^p$: Lemma von Fatou:

$$\int_E |f(x)|^p\, dx \le \underline{\lim}_{j \to \infty} \int_E |f_{k_j}(x)|^p\, dx < \infty$$

Zeige nun, daß $f_{k_j} \to f$ in L^p:

$$\int_E |f(x) - f_{k_j}(x)|^p\, dx \le \underline{\lim}_{l \to \infty} \int_E |f_{k_l}(x) - f_{k_j}(x)|^p\, dx$$

d. h.:

$$\|f - f_{k_j}\|_p \le \underline{\lim}_{l \to \infty} \|f_{k_l} - f_{k_j}\|_p \le 2^{-j}$$

Also konvergiert die Teilfolge (f_{k_j}) gegen f in L^p.
Sei nun $k > k_j$. Dann gilt:

$$\|f - f_k\|_p \le \underbrace{\|f - f_{k_j}\|_p}_{\le 2^{-j}} + \underbrace{\|f_{k_j} - f_k\|_p}_{\substack{< 2^{-j} \\ \text{nach Def. von } k_j}} < 2^{-j+1}$$

Also: $f_k \to f$ in L^p.

12.1.10 Zusatz

Konvergiert die Folge (f_k) gegen f in L^p, so gibt es eine Teilfolge (f_{k_j}) mit $f_{k_j}(x) \to f(x)$ f. ü. für $j \to \infty$.

12.1.11 Beispiel

Betrachtet wird der Raum $L^2([0, 2\pi))$.
Sei (c_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $k = -\infty, \ldots, \infty$ und die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

konvergiere. Setze dann

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \qquad \text{(trigonometrisches Polynom)}$$

Zeige: (f_n) ist Cauchyfolge: Sei $n > m$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{m<|k|\leq n} c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m<|k|\leq n} c_k e^{ikx} \right|^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{m<|k|,|j|\leq n} c_k \overline{c_j} e^{i(k-j)x} \, dx \\
&= \sum_{m<|k|\leq n} |c_k|^2 \cdot 2\pi \\
&\leq 2\pi \sum_{|k|>m} |c_k|^2 < \varepsilon^2 \text{ für } m \geq n_0
\end{aligned}$$

Somit gilt also: $f_n \to f$ in $L^2([0, 2\pi))$.

Abkürzung: Setze

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

Für $-n \leq j \leq n$ gilt dann:

$$(f_n, e^{ijx}) = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-j)x} \, dx = 2\pi \cdot c_j$$

Daraus folgt für c_j, den j-ten Fourierkoeffizienten von f_n:

$$c_j = \frac{1}{2\pi}(f_n, e^{ijx})$$

Für die Funktion f gilt:

$$(f, e^{ijx}) = (f_n, e^{ijx}) + (f - f_n, e^{ijx}).$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}|(f, e^{ijx}) - \underbrace{(f_n, e^{ijx})}_{=c_j} &= |(f - f_n, e^{ijx})| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|f - f_n\|_2 \cdot 2\pi \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

Es ist

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx}\, dx$$

$$c_j = \hat{f}_j \qquad \text{(Analysis I)}$$

Die Folge c_j erzeugt $f \in L^2$, c_j sind die Fourierkoeffizienten von f.
Ziel:

$$2\pi \|f\|_2 = \sqrt{\sum |c_k|^2}$$

($\geq$ schon bewiesen mit der Besselschen Ungleichung, siehe 6.5.6 auf Seite 149).

12.1.12 Approximation durch stetige Funktionen

Zu beliebigem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, gibt es eine Folge (g_k) von stetigen Funktionen im $\mathbb{R}^n$ mit $g_k \to f$ in L^p, sowie $g_k(x) = 0$ für $\|x\| \geq R_k$.

Beweis:

(1) Es existieren Treppenfunktionen φ_k mit

$$\varphi_k(x) \to f(x) \text{ f. ü.}, \qquad |\varphi_k(x)| \leq |f(x)| \text{ f. ü.}$$

(Aufgabe).
Da

$$|\varphi_k(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p,$$

ist der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz anwendbar und es gilt für $k \to \infty$

$$\int \|f - \varphi_k\|_p \to 0.$$

(2) Approximation von $\varphi = \varphi_k$ durch stetige Funktionen $g = g_k$:
Sei OBdA

$$\varphi(x) \begin{cases} 1 & \text{in } I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{I} \end{cases}$$

In das Intervall I, in dem die Treppenfunktion φ gleich 1 ist, wird nun ein zweites Intervall J gelegt, dessen Ränder den Abstand δ zum Rand von I haben. Setze nun

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } J \\ \frac{1}{\delta} \operatorname{dist}(x, \partial I) & \text{sonst} \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{I} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\operatorname{dist}(x, \partial I) = \min\{\|x - y\| : y \in \partial I\}$$

g ist stetig in $\mathbb{R}^n$, $g(x) = 0$ für $\|x\| \geq R$.
Es gilt damit dann

$$\begin{aligned} \|\varphi - g\|_p^p &= \int\limits_{I \setminus J} \underbrace{|\varphi(x) - g(x)|^p}_{\leq 1} \, dx \\ &\leq 1 \cdot m(I \setminus J) < \frac{1}{k^p} \text{ für kleines } \delta > 0. \end{aligned}$$

Somit folgt dann:

$$\|\varphi_k - g_k\|_p < \frac{1}{k}, \qquad \|g_k - f\| \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

12.1.13 Erinnerung an Analysis I

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion und Riemann-integrierbar über dem Intervall $[0, 2\pi]$. Definiere dann den *Fourierkoeffizienten* $\hat{f}_k$:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

Seien

$$S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx}$$

$$T_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

Trigonometrische Polynome. Dann wird definiert:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx =: (f, g),$$

insbesondere

$$\sqrt{(f, f)} = \|f\|_2$$

und es gelten:

(a)

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - T_n\|_2 \quad \forall T_n$$

(b)

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2$$

(c) die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq 2\pi \|f\|_2^2$$

12.1.14 Definition

Definiere
$$L^2_{2\pi} := L^2([0, 2\pi))$$
Funktionen $f \in L^2_{2\pi}$ werden 2π-periodisch fortgesetzt, d. h. es gilt
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
Unter diesen Bedingungen gelten (a), (b) und (c) weiter.

12.1.15 Bemerkung

Sei
$$l^2 := \left\{ (c_k)_{k=-\infty}^{\infty} : \sum_k |c_k|^2 \text{ ist konvergent} \right\}$$
Auf diesem Raum wird die folgende Norm definiert:
$$\|(c_k)\|_2 := \sqrt{\sum_k |c_k|^2}$$
Das Skalarprodukt ist:
$$((c_k), (d_k)) = \sum_k c_k \overline{d_k}$$
Die Abbildung
$$\begin{cases} l^2 & \longrightarrow L^2_{2\pi} \\ (c_k) & \longmapsto \sum\limits_k c_k e^{ikx} \quad (\text{konv. in } L^2) \end{cases}$$
ist bijektiv und normerhaltend.
L. Carleson zeigte 1963: Für $f \in L^2_{2\pi}$ gilt:
$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} \quad \text{f.ü.}$$

12.1.16 Satz

Für $f \in L^2_{2\pi}$ gilt:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = f \quad \text{im } L^2\text{-Sinn, d.h.}$$
$$\|S_n - f\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$
und es gilt die *Parsevalsche Gleichung:*
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi \|f\|_2^2$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert:

1. eine stetige Funktion $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\|f - g\|_2 < \varepsilon$$
OBdA sei $g(2\pi) = g(0)$. Falls nicht, ändere g im Intervall $[2\pi - \delta, \delta]$ so, daß $\hat{g}$ hier linear ist. Dabei ist $\hat{g}(2\pi - \delta) := g(2\pi - \delta)$ und $\hat{g}(2\pi) := g(0)$.

2. ein trigonometrisches Polynom T_m mit
$$|g(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \text{ in } [0, 2\pi]$$
(Weierstraßscher Approximationssatz)

Sei nun $n \geq m$: Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|f - S_n\|_2 &\leq \|f - T_m\|_2 \\ &\leq \|f - g\|_2 + \|g - T_m\|_2 \\ &< \varepsilon + \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\, dx} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

d. h. $S_n \to f$ in $L^2_{2\pi}$.
Aus (b) folgt:

$$\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi\|f\|_2^2 - 2\pi \underbrace{\|S_n - f\|_2}_{\to 0\ (n \to \infty)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi\|f\|_2^2$$

12.1.17 Bemerkung

Für
$$\ell_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$
und $f \in L^2_{2\pi}$ gilt:
$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\ell_k(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, \ell_k)$$
und
$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k (f, \ell_k)\ell_k \quad \text{in } L^2_{2\pi}$$
Zudem ist:
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f, \ell_k)|^2 = 2\pi\|f\|_2^2$$
und
$$(\ell_k, \ell_n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

12.2 Die Fouriertransformation

12.2.1 Definition

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$\hat{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi$$

Fourier-transformierte von f (Dabei ist $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.).
Dabei wird die Abbildung $\hat{}$: $f \mapsto \hat{f}$ definiert. Die Existenzbedingung für $\hat{f}$ ist:

$$|f(\xi)e^{-i\xi\cdot x}| = |f(\xi)|$$

12.2.2 Beispiele

(1) Sei für $\lambda > 0$

$$f(\xi) = e^{-\lambda\|\xi\|_1} = e^{-\lambda|\xi_1|-\cdots-\lambda|\xi_n|}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\hat{f}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{k=1}^n (-\lambda|\xi_k| - i\xi_k x_k)\right) d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^n e^{-\lambda|\xi_k|-i\xi_k x_k}\right) d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{k=1}^n h(x_k)
\end{aligned}$$

mit

$$h(x_k) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|\xi_k|-i\xi_k x_k}\, d\xi_k$$

Berechne nun

$$\begin{aligned}
h(u) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|-itu}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{\lambda t - itu}}_{\substack{s=-t\\ ds=-dt}} + \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t - itu}\, dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda s + isu}\, ds + \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t - itu}\, dt \\
&= \frac{1}{\lambda + iu} + \frac{1}{\lambda - iu} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + u^2}
\end{aligned}$$

Also ist dann:

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot (2\lambda)^n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^2 + x_k^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\lambda^2 + x_k^2}$$

(2) Sei
$$f(\xi) = e^{-\lambda\|\xi\|^2}$$
mit
$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$
Dann ist
$$\begin{aligned}(2\pi)^{n/2}\hat{f}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda\xi_k^2 + i\xi_k x_k\right) d\xi \\ &= \prod_{k=1}^{n} h(x_k)\end{aligned}$$
mit
$$\begin{aligned}h(u) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2 - itu}\, dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\lambda\left(t + \frac{iu}{2\lambda}\right)^2 - \frac{u^2}{4\lambda}\right) dt \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{4\lambda}\right) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\lambda\left(t + \frac{iu}{2\lambda}\right)^2\right) dt \\ &= \left|\begin{array}{c} t + i\frac{u}{2\lambda} = s \\ \text{Funktionentheorie I}\end{array}\right| \\ &= e^{-u^2/4\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda s^2}\, ds \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-u^2/4\lambda}\end{aligned}$$
Also ist
$$\hat{f}(x) = (2\lambda)^{-n/2} \cdot e^{-\|x\|^2/4\lambda}$$

12.2.3 Einfache Eigenschaften der Fouriertransformation

(1)
$$|\hat{f}(x)| \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

(2) Die Abbildung
$$\hat{}\begin{cases} L^1 & \longrightarrow L^\infty \\ f & \longmapsto \hat{f}\end{cases}$$
ist linear, d.h.
$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g},$$
und es gilt
$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

(3) (a) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $g(\xi) = e^{ia\xi} f(\xi)$ ist
$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a)$$

(b) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $g(\xi) = f(\xi - a)$ ist
$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x) \cdot e^{-iax}$$

(c) Für eine reguläre $n \times n$-Matrix A und $g(\xi) = f(A^{-1}\xi)$ ist
$$\hat{g}(x) = |\det A| \cdot \hat{f}(A^T x)$$

(d) Für $g(\xi) = \overline{f(\xi)}$ ist
$$\hat{g}(x) = \overline{\hat{f}(-x)}$$

(e) Für $g(\xi) = f(-\xi)$ ist
$$\hat{g}(x) = \hat{f}(-x)$$

Beweis: Auf dem Aufgabenblatt.

12.2.4 Satz von Plancherel

Für $f, g \in L^1$ sind $\hat{f}g$, $f\hat{g} \in L^1$ und es gilt:
$$\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$$

Beweis: Es ist
$$\begin{aligned}(2\pi)^{n/2} \int \hat{f}(x) \cdot g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi x}\,d\xi \right) g(x)\,dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i\xi x}\,dx \right)}_{=\hat{g}(\xi)\cdot(2\pi)^{n/2}} f(\xi)\,d\xi \\ &= (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \cdot f(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

Außerdem gilt:
$$|(\hat{f}g)(x)| \leq \underbrace{(2\pi)^{-n/2} \|f\|_\infty \cdot |g(x)|}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Also gilt: $\hat{f}g \in L^1$.
Wieso ist oben der Satz von Fubini anwendbar?
Nach dem Satz von Tonnelli gilt:
$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \cdot g(x) \right| d\xi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|\,d\xi\,dx \text{ existiert.}$$

12.2.5 Satz: Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\hat{f}$

(a) $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f}$ ist stetig.

(b) Falls $f(\xi)\|\xi\|^m$ in L^1 ist, so ist $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und für $|\alpha| \leq m$ gilt:

$$D^\alpha \hat{f}(x) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{\xi^\alpha f}.$$

Dabei ist

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

und

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}, \qquad \xi^\alpha = {\xi_1}^{\alpha_1} {\xi_2}^{\alpha_2} \cdots {\xi_n}^{\alpha_n}$$

z.B. ist für $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$:

$$\hat{f}_{x_1}(x) = -i \cdot (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1 f(\xi) e^{-i\xi \cdot x}\, d\xi$$

Beweis:

(a) Setze

$$F(x, \xi) := f(\xi) e^{-i\xi x}$$

$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
Ist ξ fest, dann ist $x \mapsto F(x, \xi)$ stetig.
Ist x fest, dann ist $|F(x, \xi)| \leq |f(\xi)|$, integrierbar unabhängig von x.
Zusammen ist

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x, \xi)\, d\xi$$

als Parameterintegral stetig.

(b) Beweis durch Induktion nach m:
$\mathbf{m = 1}$: ($\|\xi\| \cdot f(\xi)$ integrierbar) Sei z.B. $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$.
Ist ξ fest, so ist $x \mapsto F(x, \xi)$ stetig differenzierbar nach x_1

$$F_{x_1}(x, \xi) = -i\xi_1 f(\xi) e^{-i\xi \cdot x}.$$

Ist x fest, so gilt:

$$|F_{x_1}(x, \xi)| \leq \underbrace{\|\xi\| \cdot |f(\xi)|}_{\text{integrierbare Majorante}}$$

$\Rightarrow f_{x_1}$ ist stetig, f Parameterintegral, Formel gilt.

12.2.6 Satz

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d. h. $\hat{f}$ ist stetig und

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Insbesondere ist $\hat{f}$ gleichmäßig stetig.

Beweis: Siehe 12.2.8 auf Seite 385.

12.2.7 Hilfssatz

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sei $f_{(y)}(x) := f(x-y)$. Dann ist

$$h(y) := \|f - f_{(y)}\|_p$$

gleichmäßig stetig ($h\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$)

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(z)| &= \big|\|f - f_{(y)}\|_p - \|f - f_{(z)}\|_p\big| \le \|f_{(y)} - f_{(z)}\|_p \\
&= \left(\int |f(x-y) - f(x-z)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left|\begin{matrix} x = y + \xi \\ \text{Transformationsformel} \end{matrix}\right| \\
&= \left(\int |f(\xi) - f(\xi - (z-y))|^p \, d\xi\right)^{\frac{1}{p}} = h(z-y) - h(0)
\end{aligned}$$

d.h.: Zu zeigen ist die Stetigkeit im Punkt 0.
Sei also $\varepsilon > 0$. Dazu exisitert eine stetige Funktion g mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$, $g(x) = 0$ für $\|x\| \ge R (= R_\varepsilon)$.
Es existiert also ein $\delta > 0$, so daß für $\|y\| < \delta < R$ gilt:

$$|g(x) - g(x-y)| \le \begin{cases} \varepsilon(\Omega_n (2R)^n)^{-1/p} & \text{für } \|x\| < 2R \\ 0 & \text{für } \|x\| \ge 2R \end{cases}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(0)| &= \|f - f_{(y)}\| = \|f - g + g - g_{(y)} + g_{(y)} - f_{(y)}\|_p \\
&< \varepsilon + \left(\int\limits_{\|x\| \le 2R} \underbrace{|g(x) - g(x-y)|^p}_{<\varepsilon^p (\Omega_n (2R)^n)^{-1}} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \\
&< \varepsilon + \varepsilon(\Omega_n (2R)^n)^{-1/p} \cdot (\Omega_n (2R)^n)^{1/p} + \varepsilon \\
&= 3\varepsilon \qquad \text{für } \|y\| < \delta.
\end{aligned}$$

12.2.8 Beweis von 12.2.6

Es ist

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2} \hat{f}(x) &= \int f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \, d\xi \\
&= \left|\begin{matrix} \text{Subst.} \\ \xi = \eta - \pi \frac{x}{\|x\|^2} \end{matrix}\right| \\
&= \int f(\eta - \pi \frac{x}{\|x\|^2}) e^{-i\eta \cdot x} \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} \, d\eta
\end{aligned}$$

Nach Addition ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left|(2\pi)^{n/2} 2\hat{f}(x)\right| &= \left|\int \left[f(\xi) - f\left(\xi - \pi\frac{x}{\|x\|^2}\right)\right] e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi\right| \\ &\leq \int \left|f(\xi) - f\left(\xi - \pi\frac{x}{\|x\|^2}\right)\right| d\xi \\ &= \left\| f - f_{\left(\pi\frac{x}{\|x\|^2}\right)}\right\|_1\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\hat{f}(x)| < \text{const} \cdot \left\| f - f_{\left(\pi\frac{x}{\|x\|^2}\right)}\right\|_1 < \varepsilon \text{ für } \left|\pi\frac{x}{\|x\|^2}\right\| < \delta,$$

also für $\|x\| > \frac{\pi}{\delta}$.
$\Rightarrow \lim\limits_{\|x\|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$
$\Rightarrow \hat{f}$ ist gleichmäßig stetig.

12.2.9 Ziel: Die Umkehrformel

Im weiteren soll hier gezeigt werden, daß fast überall die Umkehrformel gilt:

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(x) e^{ix\cdot\xi}\, dx$$

12.2.10 Definition: Faltung

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$f * g(x) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

Faltung von f mit g.

12.2.11 Satz: Einfache Eigenschaften der Faltung

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert $f * g$ für fast alle x und es gilt:

$$f * g = g * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Beweis: Setze für $F\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$:

$$F(x,y) := f(x-y)g(y)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int \left(\int |F(x,y)|\,dx \right) dy &= \iint |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,dx\,dy \\ &= \int |g(y)| \underbrace{\left(\int |f(x-y)|\,dx \right)}_{=\|f\|_1} dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Tonelli-Fubini gilt:

$$2(\pi)^{n/2} \cdot (f*g)(x) = \int F(x,y)\,dy$$

existiert für fast alle x, und $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}(2\pi)^n \widehat{f*g}(x) &= (2\pi)^{n/2} \int (f*g)(\xi) e^{-i\xi\cdot x}\,d\xi \\ &= \iint f(\xi-y)g(y)e^{-i\xi\cdot x}\,dy\,d\xi \\ &= \iint f(\xi-y)e^{-i(\xi-y)\cdot x} \cdot g(y)e^{-iy\cdot x}\,dy\,d\xi \\ &= \int \left[\int f(\xi-y)e^{-i(\xi-y)\cdot x}\,d\xi \right] g(y)e^{-iy\cdot x}\,dy \\ &= (2\pi)^n \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)\end{aligned}$$

(Mit der Transformation $\xi - y = u$ in der vorletzten Zeile.)

12.2.12 Beispiel 1

Sei $n = 1$ und

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$\sqrt{2\pi}(f*g)(x) = \int_a^b e^{-|x-y|} \cdot 1\,dy$$

Das ergibt 3 Fälle:

1. $x \leq a$:

$$\int_a^b e^{-y+x}\,dy = -e^{-y+x}\Big|_a^b = e^{x-a} - e^{x-b}$$

2. $x \geq b$:

$$\int_a^b e^{y-x}\,dy = e^{y-x}\Big|_a^b = e^{b-x} - e^{a-x}$$

3. $a < x < b$:

$$\int_a^b e^{y-x}\,dy + \int_x^b e^{x-y}\,dy = 1 - e^{a-x} + 1 - e^{x-b}$$

12.2.13 Beispiel 2

Sei

$$H(\xi) := e^{-\|\xi\|_1} = e^{-|\xi_1|-\cdots-|\xi_n|}, \quad \lambda > 0$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1)

$$h_\lambda(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) e^{i\xi\cdot x}\,d\xi = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x_\nu^2}$$

(2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(x)\,dx = (2\pi)^{n/2}$$

(3) Für $f \in L^1$ gilt:

$$f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi)\hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x}\,d\xi$$

(4) Wenn $f \in L^\infty$ und stetig im Punkt x ist, dann gilt:

$$\lim_{\lambda\to 0} f * h_\lambda(x) = f(x)$$

Beweis:

1. Wie in Beispiel 1, 12.2.12
2. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(x)\,dx &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}\,dt\right)^n \\
&= \left| \begin{matrix} t = \lambda s \\ dt = \lambda\,ds \end{matrix} \right| \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2 s^2}\,ds\right)^n \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \cdot \pi^n \\
&= (2\pi)^{n/2}
\end{aligned}$$

3. Es ist

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2} f * h_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) e^{i\xi\cdot y}\, d\xi \right] dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) f(x-y) e^{-i(x-y)\cdot\xi}\, dy\, e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(x-y)\xi}\, dy \right)}_{\substack{\text{Transf.:} \\ u=x-y \\ dy=du}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \\
&= \int H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi
\end{aligned}
$$

4. Ist $f * h_\lambda$ definiert? Es ist $|f(x-y)h_\lambda(y)| \leq \|f\|_\infty$ fast überall, $h_\lambda(y) \in L^1$, also ist $f * h_\lambda$ definiert. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|f * h_\lambda(x) - f(x)| &= \left| (2\pi)^{-n/2} \int [f(x-y) - f(x)] h_\lambda(y)\, dy \right| \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \int |f(x-y) - f(x)| h_\lambda(y)\, dy \\
&= \left| \begin{matrix} y = \lambda\xi \\ dy = \lambda^n \xi \end{matrix} \right| \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int |f(x-\lambda\xi) - f(x)| \cdot \underbrace{\lambda^n \cdot h_\lambda(\lambda\xi)}_{=h_1(\xi)}\, d\xi
\end{aligned}
$$

Für $\lambda_k \searrow 0$ gilt

1)
$$|f(x-\lambda_k\xi) - f(x)| h_1(\xi) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ punktweise}$$

2)
$$|f(x-\lambda_k\xi) - f(x)| h_1(\xi) \leq (\|f\|_\infty + |f(x)|) \cdot h_1(\xi) \text{ f.ü.}$$

ist integrierbare Majorante.

Mit dem Satz von Lebesgue gilt dann:

$$h_{\lambda_k} * f(x) - f(x) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

12.2.14 Umkehrsatz

Ist $f \in L^1$ **und** $\hat{f} \in L^1$, dann gilt überall dort, wo f stetig ist:

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{ix\cdot\xi}\, dx$$

fast überall, wenn f stetig ist. Außerdem gilt:

$$f(-\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx = \hat{\hat{f}}(\xi)$$

Beweis: Die rechte Seite sei $g(\xi)$, $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi, \text{ vgl. HS}$$

mit

$$H(\lambda\xi) = e^{-\lambda\|\xi\|_1}$$

Hier gilt

1.)

$$H(\lambda\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x} \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}$$

und

2.)

$$|H(\lambda\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}| \leq 1 \cdot |\hat{f}(\xi)| \cdot t$$

hat eine integrierbare Majorante.

Nach dem Satz von Lebesgue (angewandt auf $f * h_{\lambda_k}$, $\lambda_k \to 0$) gilt dann:

$$\lim_{\lambda\to 0} f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{i\xi\cdot x}\,d\xi = g(x)$$

Da f stetig in x ist und $f \in L^\infty$ gilt:

$$\lim_{\lambda\to 0} f * h_\lambda(x) = f(x)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\|f * h_\lambda - f\|_1 &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \cdot h_\lambda(y)\,dy \right| dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{\leq} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot h_\lambda(y)\,dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(y) \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,dx \right)}_{=\|f_{(y)} - f\|_1 =: \varphi(y) \text{ stetig}} dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) h_\lambda(y)\,dy \\
&= \varphi * h_\lambda(0) \\
&\overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0) \\
&= \|f_{(0)} - f\|_1 = \|f - f\| = 0
\end{aligned}$$

Also:

$$\lim_{\lambda\to 0} \|f * h_\lambda - f\|_1 = 0,$$

insbesondere gilt $f * h_{\lambda_k} \to f$ in L^1 für jede Folge $\lambda_k \to 0$. Es existiert eine Folge $\lambda_k \searrow 0$ mit:

$$\underbrace{f * h_{\lambda_k}(x) \to f(x)}_{(*)} \qquad (k \to \infty) \text{ f.ü.}$$

Wo $(*)$ gilt, ist:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f * h_{\lambda_k}(x) = g(x)$$

12.2.15 Bemerkungen

(a) Ist $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert ein $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) = g(x)$ f.ü.

(b) Für die Abbildung $\hat{}$ gilt: $\hat{}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$. Die Klasse S besteht aus allen Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^m \cdot |D^\alpha f(x)| < \infty$$

für alle $m \in N_o$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
Ein typisches Beispiel ist $f(x) = e^{-\|x\|^2}$. Denn es ist

$$f_{x_1} = -2x_1 f, \ldots$$

12.2.16 Satz

Die Fouriertransformation bildet S bijektiv auf sich ab.

Beweis: Es ist $S \subseteq L^1 \cap C_0$ und $D^\alpha f \in S$ für $f \in S$.

(1) $f \in S$. Zeige, daß daraus folgt: $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Sei $m \in \mathbb{N}_0$. $\|\xi\|^m \cdot f(\xi)$ ist integrierbar, also ist $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(2) Sei $f \in S$, $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^m \cdot |\hat{f}(x)| < \infty$$

Es ist

$$-ix_1\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \underbrace{\left(-ix_1 e^{-ix\cdot\xi}\right)}_{\frac{\partial}{\partial\xi_1} e^{-ix\cdot\xi}} d\xi$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Schreibe nun:} \\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \ \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \bar{\xi}) \frac{\partial}{\partial\xi_1} e^{-i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)} \, d\xi_1 \right) d\bar{\xi}$$

Das innere Integral ist:

$$= \underbrace{f(\xi_1, \bar{\xi}) \cdot e^{-i\xi\cdot x}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} f(\xi_1, \bar{\xi})\right) e^{-i\xi\cdot x} \, d\xi_1$$

Also gilt zusammen:

$$ix_1\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_1}(\xi)e^{-i\xi\cdot x}\,d\xi = \widehat{f_{\xi_1}}(x)$$

Per Induktion nach $|\alpha|$ zeigt man:

$$(ix)^\alpha\hat{f}(x) = \widehat{D^\alpha f}(x)$$

Sei x fest und k so, daß

$$\max_{j=1}^{n} |x_j| = |x_k|, \quad \text{d.h. } \|x\| \le n \cdot |x_k|$$

Wähle $\alpha = (0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0)$ mit m an der k-ten Stelle. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\right)^m \|x\|^m \cdot |\hat{f}(x)| &\le |x_k|^m \cdot |\hat{f}(x)| \\ &\le \left|\widehat{D^\alpha f}(x)\right| \\ &\le \sup_{|\alpha|=m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^m |\widehat{D^\alpha f}(x)| \\ &\overset{?}{<} \infty???\end{aligned}$$

Wenn das „?“ gilt, gilt die Behauptung (2).
Beweis hiervon im Hilfssatz 12.2.17

(3) Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$: Betrachte (2) mit $D^\beta f \in S$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^m |D^\beta\hat{f}(x)| < \infty$$

für alle m. Daraus folgt: $\hat{f} \in S$.

(4) Zeige: $\hat{}$ ist injektiv:
Sei $\hat{f} = 0$. Daraus folgt mit dem Umkehrsatz, daß $f(x) = 0$ f.ü.. Da f stetig ist, gilt $f(x) = 0$, d.h. $\hat{}$ ist injektiv.

(5) Zeige: $\hat{}$ ist surjektiv. Sei $g \in S$,

$$f(x) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi \ \in S$$

und es ist $\hat{f} = g$, d.h. $\hat{}$ ist surjektiv.
Zusammen mit (4) gilt dann: $\hat{}$ ist bijektiv.

12.2.17 Hilfssatz

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $f \in S$. Dann gilt:

$$\sup \|x\|^m \left|\widehat{D^\alpha f}(x)\right| < \infty$$

Beweis: Es genügt, dies für $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ zu zeigen. Es ist

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(\xi) e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi$$

und

$$\begin{aligned}\left|(ix_k)^m \hat{f}(x)\right| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi_k^m} f(\xi) \right) e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int \left| \frac{\partial^m}{\partial \xi_k^m} f(\xi) \right| d\xi \\ &= c_{m,k} \leq c_m\end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^m \|x\|^m \cdot \left|\hat{f}(x)\right| \leq c_m$$

(Dies gilt auch für $D^\alpha f \in S$, d. h. für beliebiges α)

12.2.18 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, die Temperatur im Punkt x zum Zeitpunkt t. Sei nun $u_t = \triangle u$:

$$u_t(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t)$$

Zu lösen ist das *Cauchyproblem*: $u_t = \triangle u$ für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und den „Anfangswerten“ $u(x,0) = f(x)$.

Ansatz:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

Formale Rechnung liefert:

$$u_t = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_t(\xi,t) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

$$u_{x_k x_k} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-\xi_k^2) \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}u_t - \triangle u &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\hat{u}_t(\xi,t) + \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi,t)\right] e^{i\xi\cdot x}\, d\xi \\ &= 0, \text{ falls } [\ldots] = 0\end{aligned}$$

Dadurch entsteht ein Problem für $\hat{u}$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t) &= -\|\xi\|^2 \hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Die Lösung hiervon ist:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi) e^{-\|\xi\|^2 t}$$

Daraus folgt dann für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-i\xi\cdot y}\,dy \right] \cdot e^{-\|\xi\|^2 t} e^{i\xi\cdot x}\,d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2 t} e^{-i\xi\cdot(y-x)}\,d\xi \right] \cdot f(y)\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(y-x,t) f(y)\,dy
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
K(w,t) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2 t} e^{-i\xi\cdot w}\,d\xi \\
&= (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|w\|^2/4t}
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$u(x,t) = (2\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} \cdot f(y)\,dy. \tag{12.2}$$

Der Nachweis der Richtigkeit geschieht folgendermaßen:

1. Alles ist erlaubt, falls $f \in S$ ist, oder
2. Verifiziere alles an (12.2). (Dies gilt, falls f stetig ist und $|f(x)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\|x\|^2}$ für $\varepsilon > 0$.)

12.2.19 Bisherige Eigenschaften der Fouriertransformation

Bisher haben wir gezeigt, daß für die Fouriertransformation die folgenden beiden Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}
\hat{}: L^1 &\to C_0 \\
\hat{}: S &\to S
\end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß auch

$$\hat{}: L^2 \to L^2$$

gilt (nicht formelmäßig).

12.2.20 Hilfssatz

Für $f \in L^1 \cap L^2$ ist $\hat{f} \in L^2$ und $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Beweis: Setze

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \qquad \text{und} \qquad g = f * \tilde{f}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(-x+y) \cdot \overline{f(y)}\,dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} (f_{(x)}, f)
\end{aligned}$$

1.
$$|g(x)| \overset{\text{CSU}}{\leq} (2\pi)^{-n/2}\|f_{(x)}\|_2 \cdot \|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2^2$$

2. $g \in L^1$

3. g ist gleichmäßig stetig:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{n/2}|g(x) - g(z) &= |(f_{(x)} - f_{(z)}, f)| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|f_{(x)} - f_{(z)}\|_2 \cdot \|f\|_2 \\ &= \|f_{(x-z)} - f\|_2\|f\|_2 \\ &\to 0 \text{ für } \|x - z\| \to 0\end{aligned}$$

Es ist
$$g * h_\lambda(0) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi)\hat{g}(\xi)\, d\xi \tag{12.3}$$
mit $H(\xi) = e^{-\|\xi\|_1}$.
Da g stetig ist, gilt:
$$\lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = g(0) = \|f\|_2^2.$$

Rechts in (12.3) ist für $\lambda \to 0$: $H(\lambda\xi) \nearrow 1$: $\lambda_k \searrow 0 \Rightarrow H(\lambda_k\xi)\hat{g}(\xi) \nearrow |\hat{f}(\xi)|^2$, also

$$\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 \geq 0$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi ist dann

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \text{ rechts} &= (2\pi)^{-n/2} \int |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2}\|\hat{f}\|_2^2\end{aligned}$$

12.2.21 Satz, Parsevalsche Gleichung

Die Fouriertransformation $\hat{\ }$ läßt sich zu einer „linearen“ und „bijektiven“ Abbildung $\hat{\ }\colon L^2 \to L^2$ mit

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \qquad \text{„Parsevalsche Gleichung“}$$

fortsetzen.

Bemerkung: Dabei soll heißen:

„linear“
$$\widehat{\alpha f + \beta g}(x) = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g} \text{ f. ü.}$$

„injektiv“
$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \text{ f. ü.}$$

„surjektiv“
$$g \in L^2 \;\Rightarrow\; \text{es ex. } f \in L^2\colon \hat{f}(x) = g(x) \text{ f. ü.}$$

Beweis:

(a) Fortsetzung: Sei $f \in L^2$. Setze

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{in } [-k,k]^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $f_k \to f$ in L^2. Außerdem ist $f_k \in L^1 \cap L^2$, also ist $\hat{f}_k$ definiert und $\hat{f}_k \in L^2$.
(f_k) ist Cauchyfolge in L_2, da

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|_2 = \|f_k - f_l\|_2$$

$\Rightarrow \hat{f}_k$ konvergiert im L^2, setze

$$\hat{f} := \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k$$

(b) Die Fortsetzung ist unabhängig von (f_k):
Gelte $g_k \to f$ in L^2, $g_k \in L^1 \cap L^2$:

$$\|\hat{f}_k - \hat{g}_k\|_2 = \|f_k - g_k\|_2 \to 0$$

Also ist für $k \to \infty$:

$$\hat{f}_k \to \hat{f} = \hat{g} \leftarrow \hat{g}_k$$

Die Linearität wird als Aufgabe gestellt.
Zeige nun die Normerhaltung:

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\|_2 \overset{\text{HS}}{=} \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2$$

„injektiv“ Sei $\hat{f} = 0$ (d.h. $\hat{f}(x) = 0$ f.ü.): Für $k \to \infty$ gilt:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} f_k & \to & f & & \|f_k\|_2 & \to & \|f\|_2 & & \\ & & & & \| & & \| & & \\ \hat{f}_k & \to & \hat{f} & \Rightarrow & \|\hat{f}_k\|_2 & \to & 0 & & (k\to\infty) \end{array}\right\} f(x) = 0 \text{ f.ü.}$$

„surjektiv“ (teilweise)
$\widehat{L^1 \cap L^2}$ ist dicht in L^2, d.h.:
Zu jedem $g \in L^2$ gibt es $f_k \in L^1 \cap L^2$ mit

$$\hat{f}_k \to g \text{ in } L^2$$

Dann gibt es zu $g \in L^2$ eine Folge (f_k) in $L^1 \cap L^2$ mit $\hat{f}_k \to g$.
(f_k) ist eine Cauchyfolge in L^2, da $(\hat{f}_k)$ Cauchyfolge ist, also $f_k \to f \in L^2$. Also gilt:

$$\hat{f} = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = g \text{ in } L^2$$

also $\hat{f}(x) = g(x)$.

Beweisskizze: Skizze, daß $\widehat{L^1 \cap L^2}$ dicht in L^2 ist (Funktionalanalysis):
Sei $g \in L^2$ und setze

$$A = \inf \left\{ \|g - \hat{f}\|_2 \colon f \in L^1 \cap L^2 \right\}$$

Dann existieren $f_k \in L^1 \cap L^2$ mit

$$\|g - \hat{f}_k\|_2 \to A$$

(1) (f_k) ist Cauchyfolge $[\|u+v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2]$, $\hat{f}_k \to \hat{f}$.

(2) Es ist $(g - \hat{f}, \hat{h}) = 0$ für alle $h \in L^1 \cap L^2$.
Idee:

$$\|g - \hat{f}\|_2^2 \leq \|g - \hat{f} - \varepsilon e^{i\alpha} \hat{h}\|_2^2 \ldots$$

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} (g - \hat{f}, \hat{h}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (g - \hat{f}, \hat{h}) = 0$$

(3) Setze nun $\hat{h}(x) = h_\lambda(x - a)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$. Dann ist für fast alle a:

$$h_\lambda * \overline{(g - \hat{f})}(a) = \cdots = 0$$

$\Rightarrow g - \hat{f} = 0$ f. ü.
$\Rightarrow A = \|\hat{f} - g\|_2 = 0$.